



BIBLIOTHECA
UNIV. JAGELL.
CRACOVENSIS

kat.komp.

56262

I

Mag. St. Dr.

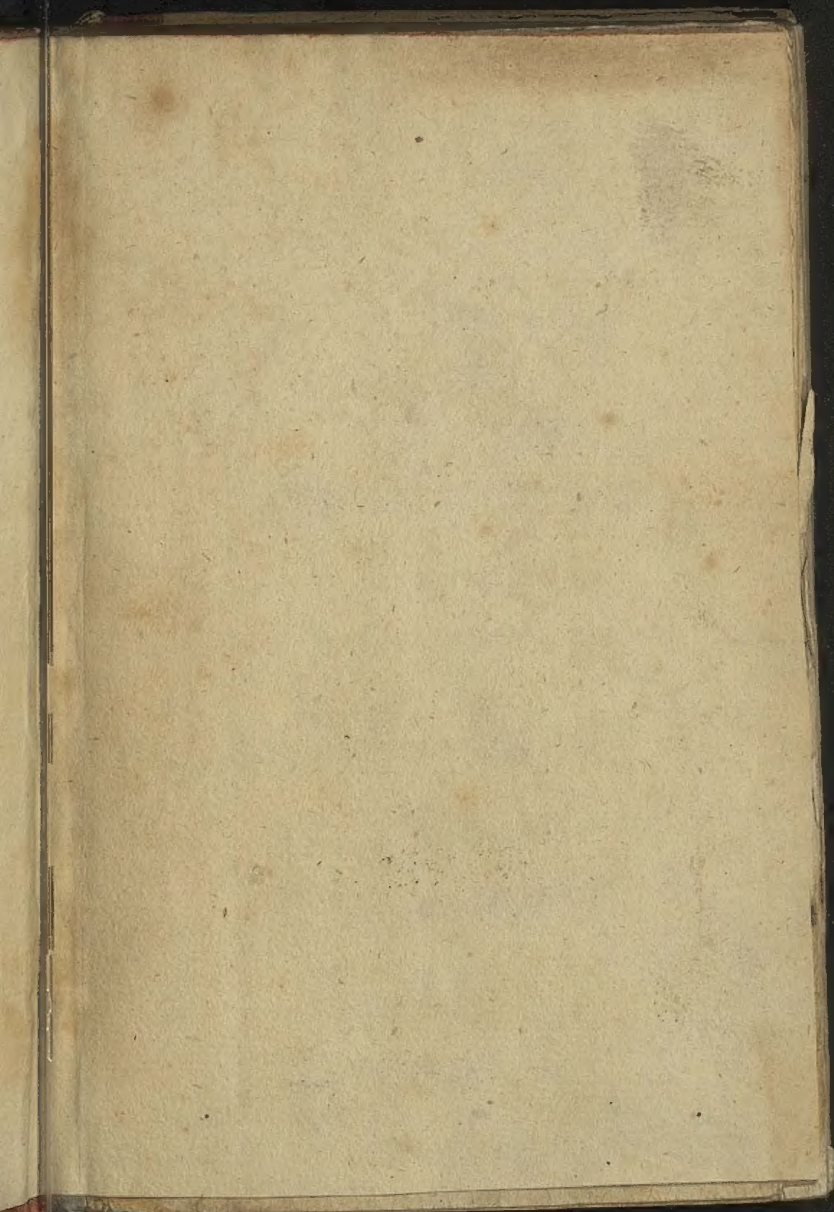
P

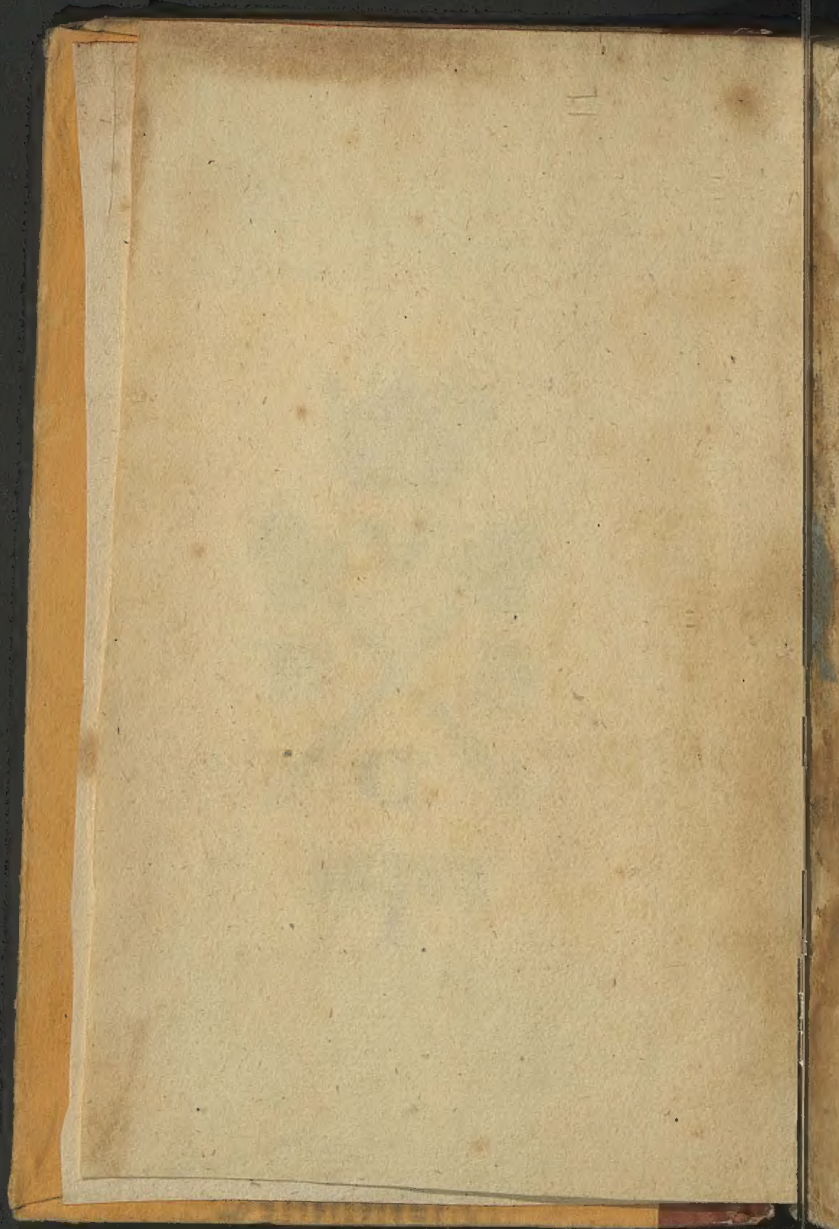


56262

I

XII. m. 27.





ALGEBRY

CZYLI

NAUKI O RACHUNKACH LITERALNYCH

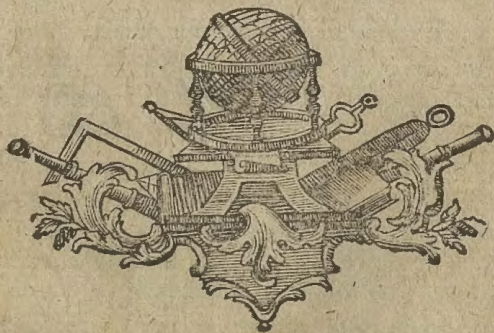
CZĘŚC DRUGA.

UŁOŻONA

PRZEZ

X. ANDRZEJA SEBASTYANA USTRZYCKIEGO

Scholarum Piarum.



W WARSZAWIE 1781.

w Drukarni J. K. Mci i Rzeczypospolitey
u XX. *Scholarum Piarum.*

56261

I



W S T Ę P
D O T E Y C Z Ę Ś C I .



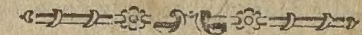
Nie zaraz, iak się ziawiła w Europie ALGEBRA, na wysokim doskonałości stopniu stanęła. Czasu trzeba było, żeby umiejętność Arabska od Europeyczyków dobrze zrozumiana, dopieroż lepiej ułożona, i wydoskonalona bydz mogła. Wprowadzona od Wiery, chodziła długo manowcami za niewiadomym drogi przewodnikiem swoim, błędziła nie raz i nie w iedném miejscu, ani mogła zayść daleko, nie mając ieszcze potrzebnych światel, któreby ją prowadziły. Nierychło Tomasz Hariot początkowe iey prawidła przepisał, mnieysze litery na miejscu większych osadził, mnożenie ilkości łączeniem liter wyraził, i wyższe stopnie niezgrabnie układać zaczął. Trzeba było poczekać Kartezego, żeby ją okrzesał, wykształ-

A2 cił,

cił, objaśnił, wyżej posunął, i przydatniejszy uczynił. Temu szczęśliwemu dowcipowi Algebra winna wzrost swój i ulepszenie z osobliwą zdatnością do Geometrii. Przecież i tak jeszcze daleka była od tej doskonałości, do której przemysłem i pracą dwóch nieporównanych Mężów w późniejszym czasie zbliżona. Newton i Leybnicy dzielą wielkopomną chwałę w nagrodzie za tak pożyteczną pracę. Należałby być pewnie do tego działu i Robert Hook, który znaczną część wieku swego łożył na dochodzeniu rzeczy przyrodzonych, gdyby była śmierć niewczesna ośnowy dzieł Jego wraz z życiem nie przerwała. Przedsięwziął był ten dowcipny Anglik ułożenie Algebry Filozoficznej, któraby mogła służyć za instrument do odkrywania prawd Fizycznych w przyrodzeniu zagrzebanych, a kawałki dzieł po nim pozostałych i między dziełami Rycharda Walies dochowanych załować każą równie Pisarza, iak pisin Jego w samym biegu zgaśłych. (*) Luboć i ta sama Algebra, której Filozofia z Matematyką ku wielorakiemu społeczeństwu ludzkiego pożytkowi dziś używa, tak jest wysoka w stopniach swoich, tak obszerna w podziałach swoich, iż piszącemu o niej bardziej o skróceniu dawnych i późniejszych wynalazków, niż o przydaniu wcale nowych przemysłać należy, zwalczając: gdy
kro

(*) *Dictionnaire Universel de Mathematique* Tom: I.
pag: 18.

kto piše dla Narodu, który z początkami tey umiejętności nie dobrze ieszcze oswoił się, a który nie śnakuie sobie w żadney rzeczy bądź naypożyteczniejszey, skoro suchey i zabawną ciekawością niezaprawney. Dla tych naybardzię przyczyn Część ta Druga Algebry nie postąpi wyżej nad czwarty stopień w rezolwowaniu składanych Zagadnień, czyli Problematów osobliwie takich, które z wyższego stopnia na niższe obrócić się nie dadzą, opuści rachunki mniejszey wagi, a działania zbyt długiego i uprzykrzonego, lekko tylko, i nie pierwéy dotknie rachunku ściennego, aż potrzeba przycisnie, zacznie pierwsze Rozdziały od wykładu wyrazów, żeby się w dal szem przekładaniu zrozumiałszą stała, i nie miała potrzeby, tam się ze słów tłumaczyć, gdzie z rzeczy samey przyidzie, a rozwodząc się obfzerniey nieco z rachunkiem wykładniczym, zbliży się do zamierzonego celu, którym iest ułatwienie naywiększey w téy Części trudności, to iest: redukcyi pomiarów wyższostopniowych, azatem rezolucyi wszelkiego rodzaju Zagadnień. Pominie atoli szczególne Ziemiomiernicze Zagadnienia, acz do ich rozolwowania naypierwéy i naybardzię przyśposabia; zostawując to działanie Geometryi iako istotnie do iey zamiaru należne, a oszczędzając znacznego kosztu na druk i rznięcie figur nieuchronnie potrzebnego, na który Pisarzów podobnych dzieł zazwyczaj nie stać.



R O Z D Z I A Ł I.

O RACHUNKU WYKŁADNICZYM.

§ I. Wykład wyrazów do zrozumienia
tey Części potrzebnych.

Rachunek Wykładniczy, *Calculus Exponentialis*, w Algebrze nazywa się ten, który się przez wykładników, *Exponentes*, odprawuje. Co zaś jest wykładnik, w początkach Pierwszey Części tey Nauki dostatecznie wyłożyło się. Dokładnieysze atoli wyśuszczenie do tey Części należy. Przeto:

I. Wiedzieć trzeba: że ilkość każda, np: a sama przez siebie rozmnożona czyni aa, czyli krótszym sposobem od Kartezego wynalezionym wyrażając: a^2 , i nazywa się Czworogranem, *quadratum*, czyli drugim stopniem, *2da potestas*, a wymawia się a do drugiego stopnia wyniesione, albo krócey: a do 2giego; samo zaś a, które przez siebie mnożyło się, nazywa się ścianą, *latus*, pierwiastkiem, *radix*, pierwszym stopniem, *prima potestas*. Ten sam znowu czworogran aa albo a^2 będzieli przez ścianę swoją to jest przez a rozmnożony, wypadnie aaa, czyli a^3 , czyli a do 3ciego, to jest: sześciogran, *cubus*, albo 3ci stopień, *3tia potestas*. Jeżeli znowu sześciogran ten a^3 rozmnożony będzie przez tęż ścianę a, wyidzie

aaaa

aaaa czyli a^4 , czyli a do 4tego, to jest: dwuczworogran, *quadrato quadratum*, albo czwarty stopień, *quarta potestas*. Jeżeli jeszcze i a^4 rozmnożone zostanie przez swą ścianę a, będzie aaaaa, czyli a^5 to jest: czworogrannosześcio-
gran, *quadrato-cubus*, albo piąty stopień. A jeżeli i ten jeszcze stopień rozmnoży się przez a, wypadnie aaaaaa czyli a^6 , to jest: dwusześcio-
ściogran, *cubo-cubus* albo stopień szósty, i tak daley wypadać mogą 7my, 8my, 9ty, 10ty i dalsze jeszcze stopnie, a tym sposobem robi się szereg terminów równowzględnych:
 $a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. a^8. a^9. a^{10}. a^{11}. i t. d.$

Takie tedy liczby ilkościom zwierzchu przypisane Wykładnikami się dlatego nazywają, iż wykładają, do którego stopnia ilkość jest wyniesiona, a razem pokazują, które miejsce też ilkość ma trzymać w liczbie terminów równowzględnych, między którymi równowzględność zachodzi Geometryczna co do liter, bo ile razy 1. mieści się w a, tyle razy a pierwszemu mieści się w drugim, drugie w trzecim i t. d. Arytmetyczna zaś co do Wykładników, iako przez się oczywista.

II. Wykładniki rzeczzone nie koniecznIE liczbą wyrażają się; mogą się wyrażać literą np: a^m, a^n, a^r i t. d., a te wykładnikami powszechnemi albo nieokreślonymi nazywają się, które określić, czyli do stopnia, którego warunki zagadnienia wyciągają, obrócić można, np: jeżeli $m = 3$, będzie: $a^m = a^3. i t. d.$

III. Trafia się także : że ilkość za wykładnika nie całkowitą ma liczbę , lecz łomaną , np: $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, i t. d, a ten łomany wykładnik wyraża ścianę tego stopnia , który przez mianownika ułamka jest oznaczony, i tak $a^{\frac{1}{2}}$ wyraża ścianę 2giego stopnia, $a^{\frac{1}{3}}$ wyraża ścianę 3ciego stopnia ; stopnie zaś takie niedoskonałemi się nazywają, *potestates imperfectae*, i to samo znaczą, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, które znaki ścianemi czyli radykalnemi nazywają się, *signa radicalia*.

IV. Miewają jeszcze ilkości przypisanego sobie wykładnika z znakiem odciążnym — , np: a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} . Wykładnik ten znaczy jedność podzieloną przez ilkość wyniesioną do stopnia tymże samym wykładnikiem naznaczonego, i tak a^{-1} jedno jest, co $\frac{1}{a}$; a^{-2} jedno jest, co $\frac{1}{aa}$; a^{-3} jedno, co $\frac{1}{aaa}$. Gdyby bowiem taka

np: trafiła się frakcyja $\frac{aaaa}{aa}$, redukując ją czyli mając tak w liczniku, iako w mianowniku aa , zostałaby w mniejszych terminach frakcyja $\frac{aa}{1}$ czyli a^2 , albo skracając i ten wyraz a , iako się mówiło w Części I. o dzieleniu ilkości.

V. Trafia się nakoniec : że ilkość zamiast wy-

wykładnika ma o, np: a^0 , z którym równa się jedności, co tak okazuję. Gdybym a^2 podzielił przez a^2 , wieloraz byłby $= a^0$, gdyż, przez Przepis na Wykładników dany w Części I: na kar: 37, odciągnąwszy iednego Wykładnika od drugiego równego, nic nie zostaje, albo co na iedno wyidzie, o zostaje, a zatem nowym Wykładnikiem ilkości a, może być o. A że a, w a, miesci się raz, więc $a^0 = 1$. Wykładnika takiego używanie bywa w Geometryczney proporcji zaczynaiącey się od iedności np: w téy; 1, 2, 4, 8, gdzie za liczby zakładając litery, będzie: $a^0 = 1$, $a^1 = 2$, $a^2 = 4$, $a^4 = 8$.

VI. Ponieważ zaś rachunek wykładniczy zamykać w sobie ma wyciąganie ścian dla wykładników łomanych, czyli łopniów niedokłonałych pod liczbą III. opisanych, wiedzieć zatem należy: wieloraka iest ściana, i jakim się znakiem wyraża. Sciana albo iwszy łopień w pórownaniu do łopniów wyższych może być rozmaita, to iest: w porównaniu do czworograna czyli zgiego łopnia bywa czworogranna, *radix quadratica*, czyli drugołopniowa, taka iest ściana a w porównaniu do a^2 , w porównaniu zaś do sześciograna, czyli zgiego łopnia, iest freściogranna, *cubica*, czyli trzeciołopniowa, w porównaniu znowu do 4tego łopnia, nazywa się czwartołopniowa, i t. d. Znak ściany iest ten $\sqrt{\quad}$, wśród którego kładzie się liczba łopień wyrażaiąca, to

to jest: liczba 2, mali być ściana czworogranna, lubo ta częściey się opuścza, liczba 3, ieśli będzie sześciogranna, a ieśli nieokreślona; kładzie się m lub n. Ilkość podobnym znakiem uprzedzona nazywa się ścienną czyli radykalną, *quantitas radicalis*, a liczba albo litera wśród ściennego znaku napisana nazywa się wykładnikiem sciany, *exponens radicalis*. np: $\sqrt[3]{ab^2}$ jest ilkość radykalna przez wykładnika swego 3 wyrażająca ścianę sześciograną ilkości ab^2 .

VII. Nakoniec przypomnieć tu krótko należy, co się w iwszey części o dodawaniu, odciąganiu, mnożeniu, i dzieleniu ilkości mających wykładników mówiło, to jest: że się takich ilkości współczynniki tylko dodają, i odciągają, kiedy są sobie podobne, kiedy zaś niepodobne, dodanie ich i odciągnięcie znakami się tylko wyraża, tak $a^2 + 3a^2 = 4a^2$. $3a^2 - a^2 = 2a^2$. Lecz $a^2 \times 3b^2 = a^2 \times 3b^2$; $a^2 - 3b^2 = a^2 - 3b^2$. i t. d. W mnożeniu zaś ilkości wykładniki dodają się, a w dzieleniu odciągają, np: $a^2 \times a^2 = a^4$, $a^2 : (a^4) = a^2$ i t. d.

§ II. Jak ilkość pojedyncza, monomia, niższego wykładnika czyli stopnia wynosi się do wyższego danego stopnia?

Ilkość pojedyncza mająca się wynieść do iakiego stopnia, albo się z iedney albo z kil-

ku liter składa, i znówu albo ma współczynnik swego, albo nie ma.

I. Jeżeli jest jedną literą wyrażona bez wyraźnego współczynnika, a z wyraźnym wykładnikiem, łatwo się wynieść do danego stopnia, rozmnożywszy iej wykładnika przez wykładnika danego, produkt będzie szukany stopniem, np: mam a^2 wynieść do 3 stopnia, więc gdy rozmnożę 2 przez 3, mieć będę a^6 . Także wynosząc x^n do nieokreślonego stopnia m, będzie $= x^{mn}$. Wynosząc zaś x^n do określonego stopnia np: do 2giego lub 3ciego, będzie x^{2n} lub x^{3n} i t. d.

Jeżeli zaś ilkość pojedyncza, którą wynieść trzeba do danego stopnia, wyrażona jest dwiema lub więcej literami, wtenczas wykładnika każdej osobna litery przez wykładnika danego trzeba rozmnożyć, np: ilkość ab do 2giego stopnia chcąc wynieść, mnożę domniemanego wykładnika i tak ilkości a , iak b przez danego wykładnika 2, będzie a^2b^2 i t. d.

OKAZANIE. Każdy dany stopień ilkości pojedynczey może się wyrazić przez a^m . Tego zaś stopnia czworogran czyli 2gi stopień jest $a^m \times a^m$; sześciogran zaś jest $a^m \times a^m \times a^m$ i t. d. A że $a^m \times a^m = a^{2m}$, także $a^m \times a^m \times a^m = a^{3m}$, gdyż wykładniki w mnożeniu dodają się (tako się dopiero ostrzegło) więc jeżeli się a^m do 2giego stopnia wynosi, trzeba wykładnika m, rozmnożyć przez 2, jeżeli do 3go, przez 3, i tak wciąż, azatem ogólnie chcąc ilkość wynieść do wyższego

go stopnia, dosyć jest, wykładnika iey przez danego wykładnika rozmnożyć.

III. Jeżeli ilkość pojedyncza mająca się wynieść do iakiego stopnia, ma współczynnik wyraźnego, współczynnik ten do tegoż samego stopnia powinien być wyniesiony, do którego się wynosi ilkość, np. jeżeli $2a^m$ wynieść trzeba do 2giego stopnia, będzie $2 \times 2 = 4a^{2m}$, jeżeli do 3ciego, będzie: $4 \times 2 = 8a^{3m}$.

IV. Jeżeli nakoniec ilkość pojedyncza frakcją jest wyrażona, wynieść się do wyższego stopnia, mianownika iey y licznika przez nią samę mnożąc: np: $\frac{a}{2}$ wynosząc do 2giego stopnia, będzie $\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$, wynosząc do 3ciego, będzie $\frac{a^2}{4} \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{8}$ i t. d.

§ III. Jak dwukrotną ilkość do danego stopnia wynieść?

Nie tylko dwukrotne, lecz i wszystkie inne ilkości do wyższych iakichkolwiek stopniów wynoszą się przez mnożenie, iako się namieniło i przykładami pokazało w 1włzcy Części, na karcie 27. Mam np: wynieść ilkość $a \mp b$ do 2giego stopnia, mnożę $a \mp b$, przez $a \mp b$ produkt $a^2 \mp 2ab \mp b^2$ będzie czworogranem. Ten znowu czworogran mnożąc przez iego ścianę $a \mp b$, wypadnie sześciogran $= a^3 \mp 3a^2b \mp 3a^2b \mp b^3$ i tak daley, niższe stopnie przez tę samą ścianę mnożąc, wypadną wyższe. W czem nie masz żadney trudności,

gdy

gdy dana ilkość wynosi się do 2giego, lub 3ciego stopnia, ale wynosić ją tym sposobem do wyższych nad 3ci stopniów, nie mała-by była praca, i omyłka prędka. Przeto do takiego wynoszenia następujący sposób bywa używany. I. Niech ta sama ilkość $a + b$ dana będzie do wyniesienia na 6ty stopień. Wynoszę naprzód 1wszą jej część do 6tego stopnia, będzie przez §. 2. 1wszy termin tego stopnia a^6 . Za 2gi piszę też samo a wyniesione do stopnia zmniejszonego iednością i przez 2gą część, to jest przez b rozmnożone, będzie a^5b , czyli a^5b^1 . Za trzeci termin położę też a , wyniesione do stopnia znowu iednością zmniejszonego, rozmnożywszy go przez b wyniesione do stopnia 2giego, będzie a^4b^2 , i tak daley, zmniejszając zawsze iednością w każdym terminie stopnie 1wszey części ilkości dwukrotnéy, a przeciwnie powiększając 2giey póty, póki nie stanę na terminie, w którymby było a pierwszostopniowe, b zaś szóstostopniowe. Tym sposobem rzeczona ilkość wyniesiona będzie do 6tego stopnia, ale jeszcze bez współczynników, i wyrazi się stopień ten albo tą iedną progressyą Geometryczną: a^6 , a^5b^1 , a^4b^2 . a^3b^3 . a^2b^4 . a^1b^5 . b^6 , albo dwiema następującemi:

1wszą. a^6 . a^5 . a^4 . a^3 . a^2 . a^1 . 1.

2gą. 1. b^1 . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b^6 .

II. Zebym zaś współczynników tych stopniów

pniów wynalazł, tak postąpię, *naprzód*: wykładnika 1włego terminu a^6 kładę za współczynnik terminu 2giego, będzie $6a^5$. *poniżej*: mając współczynnik terminu 2giego 6, mnożę go przez wykładnika 1włzey iego części to jest: przez 5, a produkt dzielę przez 2, (to jest: przez liczbę terminów, których już wynalezione są współczynniki) będzie współczynnik 3ciego terminu $15a^4b^2$. Znowu 15 rozmnożywszy przez 4, a produkt podzieliwszy przez 3, znawdę współczynnika 4tego terminu to jest: $20a^3b^3$. *i t. d.* Azatem złączywszy wszystkie te terminy przez znak $+$, będzie zupełny z współczynnikami stopień 6ty: $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

III. Jeżeli obydwie dwukrótny ilkości części, albo jedna z nich którakolwiek ma swego współczynnika, *np*: jeżeli wynieść trzeba do 3ciego stopnia $a + 2b$, *naprzód* wyniosę sposobem przepisany do 3ciego stopnia $a + b$, będzie $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, potem współczynnika owego z położonego przed b , wyniosę do tegoż stopnia, do którego w każdym zosobna terminie ilość b jest wyniesiona, i tak na 1wszy termin, w którym jest b , będzie ten sam współczynnik to jest 2, na 2gi czworogran iego 4, na 3ci sześciogran 8. Nakoniec rozmnożę te stopnie 2, 4, 8 przez współczynniki terminów do 3ciego stopnia wyniesionych to jest: przez 3 i 1, i mieć naręście

reście będą : $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$.
Przyczyna tey roboty i całego składu wyż-
szych stopniów wyłuszczone będzie w nastę-
pującym Rozdziale.

IV. Co się tycze znaków , te wtenczas
tylko powinny być dodatne , kiedy ilkość w
pierwszym stopniu w obydwóch terminach była
z znakiem $+$, gdy zaś 2ga iey część jest odciąż-
na np: $a - b$, terminy, w których ściana $-b$
wyniesiona jest do stopnia nieparzystą liczbą
1, 3, 5, wyrażonego , kłaść się powinny z zna-
kiem odciążnym , inne zaś wszystkie z doda-
tnym , tak przerzeczoną dwukrotną ilkość
 $a - b$ wyniosłszy do 3go stopnia , będzie $a^3 -$
 $3a^2b^1, + 3ab^2 - b^3$ dla wykładników nie pa-
rzytych b^1, b^3 .

V. Czasem Algebryści nie wynoszą il-
kości do danego stopnia , lecz znakami tylko
okazują : iż wyniesione bydź mają , znaki zaś
są te : liniyka ciągniona nad terminami ilkości
daney do wyniesienia , i przy końcu liniyki
po prawey iey stronie przypisany wyraźnie
wykładnik ; i tak mając $a + b$ wynieść do
2giego stopnia , piszą $a + b$ ², mając wynieść
do 3ciego , piszą $a + b$ ³, mając wynieść
do stopnia nieokreślonego , piszą $a + b$ ^m. Idzie
ztąd : iż chcąc takie ilkości do wyższego ie-
szcze wynieść stopnia , dosyć jest , i wszego ich
wykładnika przez wyższego rozmnożyć np:
 $a + b$.

$$\frac{a+b}{2} \times^3 = \frac{a+b}{6}$$
 chcąc je zaś mnożyć, dwoje jest dodać ich wykładników, a chcąc dzielić, dosyć jest odciągnąć tychże wykładników, będzie więc :

$$\frac{a+b}{2} \times \frac{a+b}{3} = \frac{a+b}{5}$$

$$\frac{a+b}{5} \times \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{7}$$

$$\frac{a+b}{7} \times \frac{a+b}{3} = \frac{a+b}{10}$$

§ IV. Jak ułożyć ogólne prawidło do wynoszenia ilkości wszelkich na wyższe stopnie ?

I. Wziąwszy dwukrotną jaką ilość np: $p+q$, wynieść ją trzeba do nieokreślonego stopnia, dwie progressye Geometryczne pisząc sposobem następującym :

$$1^m, 1^{m-1}, 1^{m-2}, 1^{m-3}, 1^{m-4}, \text{ i t. d.}$$

$$1, q^1, q^2, q^3, q^4, \text{ i t. d.}$$

Gdzie uważać potrzeba wykładników liczbami wyrażonych, które w terminach pierwszej progressyi dlatego są odciążne czyli z znakiem —, że się tu tak jednością zmniejszają, jak w drugiej jednością zwiększają.

II. Rozmnożyć terminy pojedynczo od lewey ręki brane progressyi pierwszej przez terminy drugiej, czyli połączyć jedne z drugimi, a przed tak złączeniem znak + położyć, wypadnie : $1^m + 1^{m-1}q + 1^{m-2}q^2 + 1^{m-3}q^3 + 1^{m-4}q^4, \text{ i t. d.}$

III. Ponieważ tu współczynników jeszcze braku-

brakuie , żeby ich wynaleść , drugie dwie progreſſye z ſamych wykładników zrobić trzeba, będzie:

1wſza : m. m—1. m—2. m—3. m—4.

2ga : 1. 2. 3. 4. 5.

A te obrócić na frakcye , pierwſzhey terminy za liczników , a drugiey za mianowników kładąc, będzie: $\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4}$.

Z tych frakcyi 1wſza $\frac{m}{1}$ czyli m kładzie ſię za współczynnika 2giego terminu w ogólném prawidłe ; potém toż ſamo m przez 2gą frakcyą $\frac{m-1}{2}$ rozmnożone położy ſię za współczynnika 3ciego terminu , i będzie : $m \times \frac{m-1}{2}$; tenże ſam współczynnik znówu rozmnożony przez naſtępującą frakcyą będzie współczynnikiem 4tego terminu i t. d ; a tak zupełnie wyrobione prawidło będzie : $1^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3}q^3 + p^{m-4}q^4$.

Obaczmy już użycie tego prawidła w wynoſzeniu do wyższych ſtopniów ilkoſci na-przód dwukrotny , a potém wielokrotny , ale oſtrzegam zawczaſu : że w tém działaniu równie iako i w innych podobnych całą naukę o frakcyach Arytmetycznych przytomną w pamięci mieć potrzeba.

I. Maiąc np: wynieść do 3ciego ſtopnia ilkoſć dwukrotną $2ax + b^2$, będzie $p = 2ax$,

B

q =

$q = b^2$, stopień $m = 3$. Biorę prawidło i zakładam w niem za litery p, q, m , ich ceny to jest $2ax$ za p , $+b^2$ za q , 3 za m . Będzie *naprzód*: $p^m = 8a^3x^3$; gdyż p^m pokazuje: że w cenie iego $2ax$ ilkości a, x , równie iako ich współczynnik 2 powinny być wyniesione do 3go stopnia, bo $m = 3$, będzie zatem $2 \times 2 = 4 \times 2 = 8a^3x^3$.

Powtórę: $mp^{m-1}q = 12a^2b^2x^2$, bo ponieważ $m = 3$, toć mp^{m-1} znaczy: że $2ax$ ma być wyniesione do stopnia $3 - 1$ to jest do 2giego, do tego więc stopnia ax i współczynnika 2 wyniosłszy, a $4a^2x^2$ przez 3 rozmnożywszy, gdyż $m = 3$ przed p z mnożenia wypadło, będzie $12a^2x^2$; nakoniec rozmnożywszy przez $q = b^2$, będzie: $12a^2b^2x^2$.

Potrzącie: $m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 = 6ab^4x$, ponieważ bowiem $m = 3$, toć p^{m-2} znaczy: że ilkość $2ax$ powinna w 1wszym stopniu zostać, bo $3 - 2 = 1$, q^2 zaś $= b^2$ wynieść się powinno do 2giego stopnia, azatem będzie: $2ax b^4$, przydawszy zaś współczynnika, będzie $3 \times \frac{3-1}{2} = 3$, a całą tę ilkość rozmnożywszy przez 2 położone przed ax , będzie $6ab^4x$. *Naostatek*: $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 = b^6$, gdyż zakładając za m 3 , będzie $3 \times \frac{3-1}{2} = 3 \times \frac{2}{2} = 3 \times 1 = 3$, toż samo znowu 3 rozmnożone przez $\frac{3-2}{3} = 3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$, które się opuszcza, potem $p^{m-3} = p^{3-3} = p^0 = 1$ przez Wykł: V, więc zostanie tylko $q^3 = b^6$, bo b^2 wyniesione do 3ciego stopnia przez § II. $= b^6$

$\equiv b^6$, przed którym i także się opuszcza, aza-
tem ilkości dwukrotny $2ax + b^2$ 3ci stopień
będzie: $8a^3x^3 + 12a^2b^2x^2 + 6ab^4x + b^6$.

II. Niech będzie trzykrotna ilkość $a + b$
— c mająca być wyniesioną do 4tego stopnia,
będzie $a \equiv p$, $b - c \equiv q$, stopień $4 \equiv m$, aza-
tem będzie *naprzód*: $p^m \equiv a^4$, *ponowtore*:
 $mp^{m-1}q$, ponieważ $m \equiv 4$, $\equiv 4a^4 - 1 \equiv$
 $4a^3$; q zaś założone za $b - c$ powinno się roz-
mnożyć przez $4a^3$, będzie zatem przez przepisy
dane na mnożenie w 1 części $\equiv 4a^3b - 4a^3c$,
potrzecie: $m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 \equiv 4 \times \frac{4-1}{2} \equiv$
 $4 \times \frac{3}{2} \equiv \frac{4}{1} \times \frac{3}{2} \equiv \frac{12}{2} \equiv 6a^2$; q^2 zaś będąc wy-
niesione do 2go stopnia znaczy: że $b - c$ po-
winno się wynieść do tegoż stopnia, będzie
zatem (przez § III.) $b^2 - 2bc + c^2$, a że jest
złączone z p^{m-2} , ma się rozmnożyć przez $6a^2$,
a tak będzie $6a^2b^2 - 12a^2bc + 6a^2c^2$, *po-*
czwarte: $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-3}{2} p^{m-3} q^3 \equiv 4 \times \frac{4-1}{2} \equiv$
 $\equiv 6 \times \frac{4-3}{2} \equiv \frac{6}{1} \times \frac{2}{2} \equiv \frac{12}{2} \equiv 4a^4 - 3 \equiv 4a$,
 q^3 zaś wyraża: że $b - c$ wynieść trzeba do
3go stopnia, będzie więc przez § III. $b^3 - 3b^2c$
 $+ 3bc^2 - c^3$, a ten stopień rozmnożywszy
przez $4a$, wyidzie produkt: $4ab^3 - 12ab^2c$
 $+ 12abc^2 - 4ac^3$; *popięte*: $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-3}{2}$
 $\times \frac{m-4}{2} p^{m-4} q^4 \equiv a^4 - 4q^4 \equiv a^4 - 4q^4$; a^0 zaś $\equiv 1$
przez wykład V. więc zamiast q^4 tylko kładzie
się $b - c$ wyniesione do 4tego stopnia, aza-
tem przez § III. będzie: $b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2$
 $- 4bc^3 + c^4$. Doskonały tedy ilkości trzykrotny
 $a + b - c$ stopień 4ty jest: $a^4 + 4a^3b - 4a^3c$

$$\begin{aligned}
 &+ 6a^2b^2 - 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 - 12ab^2c \\
 &+ 12abc^2 - 4ac^3 + b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 \\
 &- 4bc^3 + c^4.
 \end{aligned}$$

III. Podobnym sposobem czterokrotne i inne wielokrotne ilkości wynosić się mogą, gdyby zaśła potrzeba wynoszenia onych do wyższych stopniów, p zakładając za 1wsze dwa terminy, q zaś za drugie dwa, ale o tem więcéy niż dośyć. Kto już zechce doświadczyć: czy dobrze ilkość iaką wyniósł do danego stopnia, niech z niego też samę ilkość to jest: ścianę wyciągnie, o czem w następującym Rozdziale, a jeżeli wyciągniona ściana będzie ilkością, która się do wyższego stopnia wynosiła, znak będzie niemylnego icy wyniesienia.

ROZDZIAŁ II.

O wyciąganiu ścian, a naprzód o składzie i rozbiorze wyższych stopniów Algebraicznych.

WYciągać ścianę z danego stopnia, nic innego nie jest; tylko wynaleść pierwszą ilkość, która sama przez siebie raz lub kilka razy rozmnożona stopień dany wyrobiła, np: wyciągnąć ścianę czworogranną czyli drugo-stopniową z stopnia a^2 , jest to wynaleść ilkość a , która raz sama przez siebie rozmnożona uczyniła tenże czworogran a^2 . Przeto czworograny, sześciograny i inſze wyższe stopnie

stopnie iako z mnożenia powstałą, tak przez dzielenie do swoich się początków czyli ścian wracają.

§ V. Jak wyciągnąć ścianę z danego stopnia ilkości pojedynczey, quantitatis monomiae.

Podzielić trzeba wykładnika danego stopnia przez wykładnika daney ściany, wieloraz będzie wykładnikiem szukaney ściany np: jeżeli z a^6 wyciągać się ma ściana czworogranna, ponieważ wykładnik tey ściany jest 2, więc podzieliwszy 6 przez 2, wieloraz 3 będzie wykładnikiem ściany zapytaney, czyli ściana tego stopnia będzie a^3 . Tym samym sposobem wyciągnie się i sześciogranna ściana z danego stopnia a^6 , dzieląc 6 przez 3, a wieloraz pisząc za nowego wykładnika, będzie zatem: $a^{\frac{6}{3}} = a^2$. Samo nawet a^2 , podzieliwszy 2 przez 2, będzie $= a^1$ czyli a . Podobnie w stopniach różnemi literami i wykładnikami wyrażonych np: w tym a^6b^3 znajdzie się ściana sześciogranna, dzieląc wykładników 6 i 3 przez 3, będzie $a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{3}{3}} = a^2b$. Albowiem iako dana pojedyncza ściana wynosi się do danego stopnia, mnożąc jey wykładnika przez wykładnika stopnia danego, tak przeciwnie wyciąga się też ściana z danego stopnia, wykładnika jego dzieląc przez wykładnika ściany daney. Jakoż tym sposobem wyciągniona ściana, gdyby się sama przez siebie znowu rozmno-

mnożyła tak, iak się w i w szym Rozdziale dzia-
łało, wróciłby się tenże, co pierwéy był sto-
pień np: $a^3 \times^2 = a^6$.

§ VI. Gdy dany stopień jest w wielu termi-
nach czyli w ilkości wielokrotney, iak z
niego wyciągnąć ścianę czworograną?

Zeby temu zapytaniu zadosyć uczynić,
trzeba znać skład danego stopnia i na części
go rozebrać, czyli trzeba krótko przełożyć:
z jakich się składa części czworogran dwu-
krotney ściany, *quadratum radice binomia*, a
z jakich czworogran ściany wielokrotney, *po-
linomia*. Co do i w szego, czworogran ściany
dwukrotney składa się *naprzód*: z czworogra-
nu i w szego terminu ściany fwoiéy, *poniore*:
z dwóyki, *duplo*, tegoż i w szego terminu roz-
mnożonéy przez termin zgi, *potrzecie*: z czwo-
rogranu zgiego terminu teyże ściany. Co
tak krótko okazuję: każda ściana dwukrotna
może się wyrazić przez $a \times b$, albo przez $a - b$,
azatem ściany te wyniósszy do zgiego stopnia
czyli porobiwszy z nich czworograny przez
§ III, każdy czworogran ściany dwukrotney
wyrazić się może przez $a^2 \mp zab \mp b^2$, albo przez
 $a - zab \mp b^2$, które czworograny służyć mo-
gą za formuły czyli wzory wszelkich innych.
A że oczywista: iż obydwa te czworograny co
do znaków tylko różne składają się *naprzód*: z
czworogranu i w szego terminu ściany fwoiéy to
jest:

jest: $z a^2$, *ponwtóre*: z dwóyki tegoż termi-
 nu i wśzego rozmnożonéy przez $2gi$ to jest:
 $z +$ albo $—$ zab , *nakoniec*: z czworogranu
 terminu $2giego$ to jest $z + b^2$; więc wszelki
 czworgran ściany dwukrotnéy ten a nie inny
 skład w sobie zawiera. Co się tycze ściany czwo-
 rogrannéy trzykrotnéy, czterokrotnéy *i t. d.*
 z tych każda uważać się może iako dwukro-
 tna, biorąc po kilka iéy terminów za ieden,
 azatem każdego czworogranu mającego ścia-
 nę wielokrotną części wyrazić się mogą i wśz-
 g lub $2gą$ przerzeczoną formułą, które mając
 przed oczyma w ciągnieniu ściany zapytańey,
 następujących trzymać się potrzeba przepisów.

Przepis 1. Litery wyrażające czworogran,
 z którego się ściana czworogramu wyciąga,
 układać tym porządkiem: żeby na i wśzém
 miejscu była ta litera, która największego
 ma wykładnika, na drugiem zaś ta, która ma
 mnieyszego jednością, na trzeciem, która ma
 ieszcze mnieyszego albo żadnego nie ma, toż ca-
 ły ten czworogran określić temi znakami
 $| : |$ albo też temi $(:)$ Dopiero mając w
 pamięci, że czworogran ściany dwukrotnéy
 składa się z czworogranu i wśzego terminu ścia-
 nu *i t. d.* czyli mając przed oczyma formułę:
 $a^2 + zab + b^2$, działać podług dalszych prze-
 pisów.

Przepis 2. Ponieważ w i wśzym terminie
 danego i porządnie ułożonego czworogranu za-
 wiera się czworogran i wśzego terminu ściany

wy-

wyrażony w formule przez a^2 ; więc wyciągnąć z niego ścianę czworograną sposobem w § V. opisanym, i położyć ją za 1wszy termin ścienny po prawy stronie. Potém czworogran jego odciągnąć od danego stopnia, a resztę terminów zachować do dalszego działania.

Przepis 3. W téj reszcie zawiera się jeszcze dwówka 1wszego terminu ściennego przez 2gi rozmnożona wyrażona przez $2ab$, i czworogran terminu 2go wyrażony przez b^2 , więc przez dwójkę rzeczoną podzielić termin 1wszy pozostały reszty, a wieloraz napisać za 2gi termin ścienny, toż rozmnożyć go tak przez niego samego, iako przez dwójkę rzeczoną, a produkt odciągnąć od wzmiankowaney reszty; jeśli po tém odciągnięciu nic nie zostanie, znak będzie: że dany stopień doskonałym był czworogranem ściany dwukrotny, która już wyciągnięta. Jest np: czworogran dany $(n^2 + 4n + 4)$ którego terminy przez *Przepis 1.* tak są ułożone: że ten na 1wszém jest miyściu, który naywyższego ma wykładnika to jest n^2 ; przez *Przepis 2.* z 1wszego terminu danego czworogranu n^2 wyciągnięta ściana n jest 1wszym terminem ściany dwukrotny, a tego czworogran odciągnięty od n^2 zostawie resztę: $4n + 4$; przez *Przepis 3.* téj reszty termin 1wszy $4n$ podzieliwszy przez dwójkę terminu ściennego znalezione go n to jest przez $2n$, wieloraz $+ 2$ wypadnie za 2gi termin ściany czworogranney, który rozmno-

mnożywszy tak przez niego samego , iako przez dwóykę 1wszego terminu ściany , to jest przez 2n , da produkt : $\ast 4n \ast n$, a ten odciągnąwszy od reszty danego czworogranu , nic zostanie , co znakiem będzie : że dany stopień jest doskonałym czworogranem ściany dwukrotny $n \ast 2$. Wszakże gdybym wyniósł tę ścianę do 2go stopnia , wróciłby się nieochylnie dany czworogran .

Przepis 4. Gdyby zaś po wyciągnięciu 2go terminu ściany pozostała jeszcze iaka reszta z danego stopnia ; dowodembyto było : iż ściana , która się wyciąga , ma się jeszcze składać z 3go terminu , trzeba go więc wyciągać następującym sposobem : dwa 1wsze terminy ściennie już znalezione wziąwszy za jeden , niewiadomy zaś , którego szukam , za 2gi , tak postąpię , iakobym dotąd czworogran tylko terminu 1wszego od danego stopnia odciągnął , azatém iakoby w reszcie tegoż stopnia zawierała się jeszcze dwóyka 1wszego terminu ściennego rozmnożona przez 2gi , (biorąc za 1wszy termin sumę dwóch znalezionych , a za 2gi biorąc 3ci jeszcze niewiadomy) i czworogran terminu 2go . Przeto znowu podług *Przep:* 3go działam , to jest : przez dwóykę terminu 1wszego już znalezionego idzielię jeden który z terminów w reszcie pozostałych , a wieloraz piszę za nowy termin ścienny , potem wieloraz ten mnożę tak przez niego samego iako i przez dwóykę terminu

minu 1wszego ściennego, a produkt odciąg-
gam od rzeczonyj reszty. Niech będzie np:

Stopień dany:

Sciuna Czworogr:

$$(a^2 - 2a + 4ab + 4b^2 - b + 1) a - 1 + 2b.$$

Przez *Przepis* 1. terminy porządnie ułoży-
wszy; przez 2. wyciągam ścianę a z 1wsze-
go terminu a^2 i piszę ją za pierwszy termin
ściany czworogrannéj, a czworogran jego a^2
odciągam od danego stopnia to jest od a^2 , zo-
stała reszta $= -2a + 4ab + 4b^2 - b + 1$; przez
Przep: 3. reszty téj 1wszy termin $-2a$ dzie-
lę przez dwójkę 1wszego terminu znalezio-
nego to jest: przez $2a$, wieloraz -1 piszę za
2gi termin ścienny, a ten rozmnożywszy
przez niego samego i przez dwójkę 1wszego
terminu to jest przez $2a$, produkt $= 2a + 1$,
odciągam od reszty wyżej pozostałej, po któ-
rém odciągnięciu została jeszcze reszta $=$
 $+4ab + 4b^2 - 4b$; przez *Przep:* 4. dwa termi-
ny ściany wyciągnioné $a - 1$ za ieden wzią-
wszy i podwóiwszy, przez dwójkę ich to jest
przez $2a - 2$ dzielę pozostałą resztę to jest
uważam: ile razy 1wszy dzielnika termin $2a$
mieści się w 1wszym terminie reszty $+4ab$,
a wieloraz $+2b$ piszę za nowy termin ścien-
ny, który przez siebie samego i przez dwóy-
kę dwóch 1wszych terminów ściennych roz-
mnożony da produkt $4ab - 4b + 4b^2$ równy
reszcie, od której odciągniony, reszty nie zo-
stawi; zatem dany stopień jest doskonałym

CZWO-

czworogranem , a ściana jego czworograną
 jest a—1*2b.

Przepis 5. Gdyby zaś i po trzeciém ie-
 szcze odciągnięciu miała zostać iaka reszta z
 czworogranu danego, znakiembyto było: iż
 w nim ukryty jest 4ty ieszcze termin ściany
 czworogrannéy , azatém trzy terminy iéy
 brać trzeba za ieden , a 4ty za 2gi i daléy tak
 działać , iak pierwéy , a gdyby i potém ie-
 szcze działaniu została reszta , 4 terminy brać
 trzeba za ieden i podług Przepisów poprzedza-
 iących działać póty , póki reszt owych stanie.

Przepis 6. Gdyby dany czworogran wy-
 rażony był ułomkiem czyli frakcyą ; ściana
 jego osobno z licznika , a osobno z miano-
 wnika wyciągać się powinna , zachowując Prze-
 pisy dopiero dane.

Przeestroga 1. Niezawodność sposobów do
 wyciągnięcia tey ściany użytych z samego we-
 wnętrznego składu czworogranów wypływa ,
 iako każdy jasnie to widzieć może , porówny-
 wając rzeczony kształt z działaniem poprzedza-
 iącym. Doświadczenie zaś , czy dobrze wy-
 ciągnięta ściana czworogranna , niezawodnie
 będzie ; ieśli ściana ta znowu do zgo stopnia
 wyniesiona zgodzi się we wśzystkiém z czworo-
 granem danym.

Przeestroga 2. Jeżeli z danego czworogra-
 nu nie można wyciągnąć ściany , niemożność
 ta wyraża się przez znak ścienny ∇ i przez
 liniykę wyżéy tego stopnia ciągnięną tym spo-
 sobem:

sobem: $\sqrt{a \times b}$. Zkąd wziął swój początek. Rachunek ścienny, *Calculus radicalis*, długi i nudny, a mało przydatny. Ponieważ bez niego można ciągnąć ścianę z czworogranu niedoskonałego przez przybliżanie sposobem Algebraicznym niżej pod § IX. opisanym, albo obróciwszy litery na liczby sposobem Arytmetycznym, o którym w Rozdziale III. Aleć i o tym rachunku będzie choć krótka nauka w przedostatnim Rozdziale téy części.

§ VII. Rozbiór sześciogranów i ścian z nich wyciąganie.

I. Chcąc iak na dłoni widzieć skład sześciogranów, weźmy przed oczy ścianę np: $a \times b$, i wynieśmy ją do 3go stopnia. Wyniesiona przez § III. będzie $a^3 \times 3a^2b \times 3ab^2 \times b^3$. Stopień ten czyli sześciogran zrobiony z ściany dwukrotnéy z czego się składa, widoczna. Składa się *naprzód*: z sześciogranu 1wszego terminu ściany swoiéy to jest $z a^3$; *powtórę*: z tróyki czworogranu, *triplô quadrati*, terminu 1wszego téyże ściany rozmnożonego przez 2gi to jest $z \times 3a^2b$, *potrzecie*: z tróyki terminu 1wszego rozmnożonego przez czworogran terminu 2go to jest $z \times 3ab^2$, *poczwarte*: z sześciogranu terminu 2go to jest: $z \times b^3$. To mając przed oczyma, a do wyciągania ściany sześciogrannéy przystępując, uważać i zachować potrzeba następujące Przepisy.

Prze-

Przepis 1. Tenże sam i tu służy, który dany jest w § VI. o porządném ilkości ułożeniu, które na tém zależy: żeby ilkość z największym wykładnikiem na 1wszém miejscu po lewéj stronie była, z mniejszym na 2gim i t. d.

Przepis 2. Z samego weyrzenia na formułę sześciogranną: $a + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ poznać można: że danego 3go stopnia termin 1wszy a^3 zawiera w sobie sześciogran 1wszego terminu ściennego, więc ścianę sześciogranną wyciągnąć z niego potrzeba przez § V. ta będzie 1wszym ścianą sześciogrannéj terminem $= a$, toż sześciogran jego odciągnąć od danego stopnia, a resztę do dalszego działania zachować.

Przepis 3. W téj reszcie zamykać się będzie trójką czworogranu terminu 1wszego dopiero znalezionej rozmnożona przez termin 2gi ścienny wyrażona w formule przez $3a^2b$, zaczęm zrobiwszy z terminu 1wszego znalezionej czworogran i potroiwszy go, czyli przez 3 rozmnożywszy, a przez produkt podzieliwszy 1wszy termin reszty, wieloraz $\frac{3aab}{3aa}$ będzie 2gim terminem $= b$. Ten mając, trzeba *naprzód*: rozmnożyć przez niego troisty czworogran terminu 1wszego wyrażony przez $3a^2$, będzie $+ 3a^2b$; *potwóre*: trójkę terminu 1wszego wyrażoną przez $3a$ rozmnożyć przez czworogran 2go wyrażony przez b^2 , będzie $+ 3ab^2$; *potrzecie*: wynieść tenże 2gi termin b do 3go stopnia, będzie $+ b^3$, a te 3 produ-

produkta odciągnąć od reszty z danego stopnia po 1wszém odciągnięciu pozostały (podług nauki *na kar*: 21, *Części I.*) tak dopiero cały sześciogran ściany dwukrotny dotąd szukaney odciągniony będzie od danego stopnia. Przeto jeżeli z niego po tém odciągnięciu nic nie zostanie, znak będzie: że stopień ten jest doskonałym sześciogranem ściany dwukrotny. Obaczmy to działanie w przykładzie. Niech będzie np:

Stopień dany. *Ściana.*

$$\begin{array}{r}
 | 8x^6 - 12x^4n + 6x^2n^2 - n^3 | \quad 2x^2 - n \\
 - 8x^6 + 12x^4n - 6x^2n^2 + n^3 \\
 \hline
 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0
 \end{array}$$

Podług *Przep*: 1. terminy są ułożone, podług *Przep*: 2. z 1wszego terminu danego stopnia $8x^6$ wyciągnąwszy ścianę sześciograną, znalazł się termin 1wszy ścienny $= 2x^2$, którego sześciogran $8x^6$ odciągniony od danego stopnia zostawił resztę: $-12x^4n + 6x^2n^2 - n^3$, podług *Przep*: 3. reszty téy termin 1wszy $-12x^4n$ podzielony przez troisty czworogran 1wszego terminu ściennego to jest: przez $12x^4$, dał 2gi termin ścienny $-n$, który rozmnożywszy przez tenże czworogran, żeby było $-12x^4n$, potem troisty czworogran terminu 2go to jest $3n^2$, rozmnożywszy przez termin 1wszy $2x^2$, żeby było $+6x^2n^2$, nareście termin 2gi to jest $-n$ wyniółszy do 3ciego stopnia, żeby było $-n^3$, a to wszystko odciągną-

gną-

gnawszy od reszty danego stopnia., podług reguły subtrakcyi, nic nie zostało, azatém stopień dany musi być doskonałym sześciogranem ściany dwukrotnéy $2x^2 \dots n$.

Przepis 4. Gdyby zaś po tém drugiem odciagnieniu jeszcze iaka reszta zbywała, znakbyto był: że ściana tego stopnia składa się ze trzech terminów. Więć dwa iwszy znalezione za ieden wzięwszy, ten zaś, który jeszcze nie jest odkryty, za 2gi; tak postąpić, iakoby w ciagnieniu ściany dotąd nic się więcéy nie uczyniło, tylko sześciogran iwszego terminu ściennego odciągnął od danego stopnia, w którego reszcie zawierać się ma nadto troisty czworogran terminu iwszego (biorąc dwa znalezione za ieden, a za drugi ten, który jeszcze niewiadomy) rozmnożony przez 2gi, potém troisty czworogran terminu 2giego jeszcze nieodkrytego rozmnożony przez termin iwszy podwójny, nareszcie sześciogran 2go terminu. Dlatego przez 3. *Przepis* trzeba z terminu iwszego to jest z summy dwóch znalezionych zrobić czworogran, a przez ten trzykroć wzięty podzielić następujący termin pozostałej reszty, wieloraz pisząc za nowy termin ścienny. To skończywszy trzeba znowu troisty czworogran terminu iwszego ściennego podwójnego rozmnożyć przez termin 2gi dopióro znaleziony, i przeciwnie troisty czworogran terminu 2giego rozmnożyć przez termin iwszy, nakoniec tenże termin 2gi wy-

nieść

nieść do 3go stopnia, a to wszystko od reszty po zgięciu odciągnięciu pozostały odciągnąć, nie zostawiając reszty, ściana będzie zupełnie wyciągniona.

Przepis 5. Jeżeli zaś i po tém jeszcze odciągnięciu zostanie jaka reszta z danego stopnia, znak będzie: iż 4ty termin ścienny w nim się zamyka, przeto ściana z czterech terminów składać się mająca powinna być obrócona do 2 terminów tak, żeby za 1wszy wzięte były trzy znalezione, a 4ty za 2gi, i działanie wyżej przepisanyym sposobem było kończone *i t. d.*

Przepis 6. Jeżeli nakoniec dany stopień będzie łamaną liczbą wyrażony, podług tych samych Przepisów wyciągać się ma ściana sześciogranna tak z licznika, iako z mianownika.

II. Następujący sposób wyciągania ścian sześciogrannych krótszy jest ponieważ od 1wszego, ale na Przepisach jego zasadzony, i bez zrozumienia tamtych ledwie zrozumiały, który da się widzieć w następujących przykładach.

C.	A.	B.
$3a^2.$	$ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. $	$a - b.$
	$- a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^2.$	
	<hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/>	
	<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> o o o o </div>	

Dany jest sześciogran 'A', z którego wyciągnąć potrzeba ścianę sześciograną B, 1wszym iey terminem wyciągnionym z a^3 jest a poło-

żone

żone pod B, troisty iego czworogran $3a^2$ po-
łożony pod C jest dzielnikiem 2go terminu
pod A położonego to jest — $3a^2b$. Ztąd wielo-
raz wypadły — b jest 2gim terminem ściany
położony pod B. Sześciogran z tych dwóch
terminów a — b zrobiony i od całego stopnia
pod A położonego odciągniony kończy dzia-
łanie. Sciana więc = a — b.

H.	F.	G.
$12a^2 \mid 8a^3 - 36a^2 + 54a - 27$ $- 8a^3 + 36a^2 - 54a + 27$ <hr style="width: 100%;"/> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> o o o o </div>	$8a^3 - 36a^2 + 54a - 27$	$2a - 3$

Z danego sześciogranu F wyciągając ścia-
nę G, naprzód wyciąga się ściana sześciogranna
z $8a^3$, która jest = $2a$ położona pod G,
przez której troisty czworogran położony pod
H, to jest przez $12a^2$ dzieli się 2gi termin da-
nego stopnia F, to jest — $36a^2$, a wieloraz
— 3 wypada za 2gi termin ściany G, toż z
obydwóch tych ściennych terminów zrobiony
sześciogran odciąga się od terminów stopnia F,
po którym odciągnięciu gdy nic nie zostało,
znac: że ściana sześciogranna danego stopnia
jest = $2a - 3$.

Przeestroga. Sposoby te wyciągania ścian
sześciogrannych z wnętrznego, iako każdy wi-
dzi, sześciogranów składu wypływają, azatém
niezawodne być muszą. Jeżeli jednak chce kto
doświadczyć: czy dobrze wyciągnął ścianę,
niech zrobi z niej sześciogran, a ten, będzie li
C dane-

danemu równy, upewni o rzetelności ściany wyciągnioney. Jeżeli zaś z danego stopnia ściana sześciogranna nie może się wyciągnąć, tedy przez znak ścienny i liniykę wierzchem ciągnioną wyraża się tak: $\sqrt[3]{a-b}$, albo tak: $\sqrt[3]{a-b}$.

§ VIII. *Ogólne prawidło służące do wyciągania ścian z danych jakichkolwiek stopniów.*

To samo prawidło, które w § IV. opisane jest, może być i tu wygodnie użyte z temi jednak warunkami, *naprzód*; żeby ilkość, z której ma się wyciągać ściana, uważać niby daną do wyniesienia na ten stopień, którego się ściana szuka. *Powtóre*: żeby brać na ścianę czworogranną wykładnika łamanego, czyli wykładnika niedoskonałego czworokąta $\frac{1}{2}$, na sześciogranną $\frac{1}{3}$, na ścianę czwartostopniową $\frac{1}{4}$ i t. d. przez Wykład III. § 1wśzy; dopiero przystąpić do ciągnięcia ściany za pomocą prawidła sposobem, który okażą następujące przykłady:

I. Niech będzie dany stopień: $a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$, z którego wyciągnąć potrzeba ścianę czworogranną. Z ogólnego prawidła: $p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2$ i t. d. dosyć będzie wziąć trzy 1wśze terminy (inne bowiem nie są zdatne, gdyż ściany z nich wyciągnięte byłyby niedoskona-

łe)

Je) i założyć p za a^2 , q za $2ab - 2ac$; a że tu idzie o ścianę czworokrotną, więc wykładnikiem iey będzie $\frac{1}{2} = m$. Obracając już terminy prawidła na litery za nie dopiero założone, będzie iwszy ściany termin: $p^m = a^2 \times \frac{1}{2} = a$, 2gi termin: $m p^{m-1} q = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{1}{2} = q$, czyli odciągnąwszy — 1 albo — $\frac{2}{2}$ od $\frac{1}{2}$, będzie: $\frac{1}{2} a^2 \times -\frac{1}{2}$, czyli $\frac{1}{2} a - \frac{2}{2} q$, to jest: $\frac{1}{2} a - 1 \times 2ab - 2ac$, to jest: biorąc iwszy termin $2ab$ położony pod linią, i mnożąc współczynnika $\frac{1}{2}$ przez współczynnika z ilkości $2ab$, będzie $\frac{1}{2} \times 2 = 1$, które się opuszczają; toż wykładnika ilkości a — 1 wyraźnego, ilkości zaś $2ab$ domniemanego dodając, podług przepisów na wykładniki w mnożeniu, będzie: $a^{-1+1} = a^0 b = 1b$, (gdyż $a^0 = 1$ przez Wykład V.) $= b$. Biorąc zaś i 2gi termin pod tą linią położony — $2ac$, będzie iak piérwéy: $\frac{1}{2} a^{-1} \times -2ac = -a^{-1+1} c = -1c = -c$; więc ścianą szukaną będzie $a + b - c$. Póty bowiem tylko się idzie, póki się nie stanie na $m = 0$, co gdy się trafiło w $a^0 b$ i w $-a^0 c$, już tém samém wynalezione są wszystkie terminy ściany szukanéy.

II. Niech będzie do wyciągnięcia dana ściana sześciogranna z stopnia: $a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$; będzie $a^3 = p$, $-3a^2b - 3ab^2 = q$, a że tu idzie o ścianę sześciogranną, będzie $\frac{1}{3} = m$; kładąc już za p, q, m, ich ceny we dwóch prawidła ogólnego, terminach, będzie: $p^m =$

$a^3 \times \frac{1}{3} = a$ pierwszy termin ścienny. Potém $mp^m - 1 q = \frac{1}{3} a^3 \times \frac{1}{3} - 1 q$, czyli odciągając — 1 od $\frac{1}{3}$, będzie $\frac{1}{3} a^3 \times \frac{1}{3} - 2 q$, mnożąc zaś , ' będzie : $\frac{1}{3} a - 6 q$, to jest: $\frac{1}{3} a - 2 q$, albo kładąc za q cenę ie-
go: $\frac{1}{3} a - 2 \times - 3 a^2 b = - \frac{2}{3} a - 2 \times 2 b = -$
 $a^0 b = - 1 b = - b$. I na tém trzeba prze-
stać, iako się wyżéy namieniło. Sciana więc
szesciogranna danego stopnia będzie: $a - b$ i t.d.

Przestroga. Kiedy cena litery m za wy-
kładnika w prawidłe położonéy nigdzie nie
trafia się $= 0$, natenczas sciana danego sto-
pnia będzie niedoskonała, czyli, iakię Alge-
bryści nazywają, nieracyonalna, *Radix irratio-*
nalis, która mniéy, niż jednością chybia od
doskonałéy, ani żadną tak liczbą, iak literą
wyrazić się nie może, a zatém wyciąganie onéy
może się pociągnąć nieskończenie czyli przez
terminy nieskończone, co się w Algebrze i
Arytmetyce nazywa przybliżaniem ścian,
approximatio radicum, o którym następujący §.

§ IX. *Wyciąganie ścian z stopniów niedo-*
skonałych przez przybliżanie czyli przez
terminy nieskończone.

I. Wyciąganie takie żadnéy nowéy nie u-
czyni trudności trzymającemu się wyżéy opi-
sanego, a dopiéro użytego prawidła. Wzią-
wszy bowiem z tego prawidła tyle początko-
wych terminów, przez ile się podoba mieć
ścianę ciągnioną np: 4, albo 5; to jest: $p^m -$
 mp^m

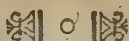
$mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3}q^3$, założyć litery p, q, m, za ilkości składające dany stopień, z którego ma się ściana ciągnąć przez przybliżanie, a wreszcie to wszystko czynić, co się w przykładach wyżej danych czyniło.

Daymy np: drugi stopień czyli czworogran niedoskonały $a^2 - b^2$; z którego ściana czworogranna ma się wyciągać przez terminy nieskończone A. B. C; będzie: $p = a^2$, $q = -b^2$, m zaś, dla ściany czworogrannéy $= \frac{1}{2}$ przez Wykład III, azatém będzie:

A. ($p^m = a^2 \times \frac{1}{2}$, to jest: $a^2 \frac{1}{2} = a^2$) $= a$.

B. ($mp^{m-1}q = \frac{1}{2}a^2 \times \frac{1}{2} - 1q$, to jest: odciągający -1 , czyli $-\frac{2}{2}$ od $\frac{1}{2}$, a resztę $= -\frac{1}{2}$ rozmnożywszy przez wykładnika ilkości $\frac{1}{2}a^2$, będzie: $\frac{1}{2}a^2 \times -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^{m-1}q$, czyli za q założywszy jego cenę $-b^2$, będzie: $\frac{1}{2}a^{m-1} \times -b^2$, czyli naprzód: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, (gdyż $a^{m-1} = \frac{1}{2}$ przez Wykład IV.) $= \frac{1}{2a}$, powtóre: $\frac{1}{2a} \times -b^2 = -\frac{bb}{2a}$.) $= -\frac{bb}{2a}$.

C. ($m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2 = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} - 1)$: 2, to jest: od $\frac{1}{2}$ odciągając -1 , a resztę $-\frac{1}{2}$ dzieląc przez 2, będzie wieloraz $-\frac{1}{4}$, a ten mnożąc przez $\frac{1}{2}$, będzie: $-\frac{1}{8}a^2$; toż samo znowu $-\frac{1}{8}a^2 \times \frac{1}{2} - 2$, odciągając -2 od $\frac{1}{2}$, a resztę $-\frac{3}{2}$ przez wykładnika ilkości a^2 mnożąc, będzie $-\frac{3}{8}a^{m-3}q^2$, czyli przez IV. Wykład: $-\frac{3}{8}a^{m-3}q^2$; nareszcie za q^2 zakładając $-b^2$ wyniesione do 2go stopnia to jest $-b^4$, przeto: że q^2 jest czworogranne, będzie



dzie przez tenże Wykład : — $\frac{1b^4}{8a^3} - \frac{b^4}{8a^3}$ *i t. d.*
 Będzie więc ściana przez przybliżanie wycią-
 gniona $A + B + C = a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3}$

II. Spółśób ten ciągnięcia ściany przez przybliżanie zda się być niewdrożonym w takie rachuby przytłudnym i długim, lecz skoro się wdrożą, usnadnić go sobie i skrócić potrafią. Jeżeli atoli samo wdrażanie się zatrudnia, mogą innego prawidła od Newtona ułożonego użyć, które przeto jest wygodniejszy, że uymuje mozołu ; który frakcye zadają ; jako każdy w używaniu samém doświadczy. Jest zaś takie: $P \frac{m}{n} + \frac{m}{n} A Q \mp \frac{m-n}{2n}$

$B Q \mp \frac{m-2n}{3n} C Q \mp \frac{m-3n}{4n} D Q$ *i t. d.*

Gdzie P wyraża iwszy termin téy ilkości, którey się ściana ma wyciągać, Q znaczy resztę terminów téyże ilkości podzielonych przez P czyli przez termin iwszy, $\frac{m}{n}$ wyraża wykładnika czyli stopień ściany ; litery zaś A, B, C, D znaczą terminy już wyciągnięte to jest : A wyraża iwszy termin ścienny wyciągnięty $= P \frac{m}{n}$; B 2gi termin $= \frac{m}{n} A Q$, C 3ci $= \frac{m-n}{2n} B Q$ *i t. d.* Przykłady używanie tego prawidła pokażą.

I. Niech będzie dana do wyciągnięcia
ściana czworogranna z ilości $\sqrt{c^2 + x^2}$, bę-
dzie $P = c^2$, $Q = \frac{x^2}{c^2}$, gdyż Q wyraża re-
szkę tetminów daney ilości podzieloną przez
iwszy, $m = 1$, $n = 2$ azatém wykładnik
zgiego stopnia $\frac{1}{2} = \frac{m}{n}$. Będzie więc :

$$A \left(P \frac{m}{n} = c^2 \times \frac{1}{2} \right) = c^1 = c.$$

$$B \left(\frac{m}{n} A Q = \frac{1}{2} c \times \frac{x^2}{c^2} \text{ to jest : } \frac{c}{2} \times \frac{x^2}{c^2} = \frac{cx^2}{2c^2} = \frac{x^2}{2c} \text{ i t. d.} \right)$$

II. Niech będzie dana do wyciągnięcia
ściana fześciogranna z ilości $\sqrt{a^3 - b^3}$,
będzie $P = a^3$, $Q = -\frac{b^3}{a^3}$, $m = 1$, $n = 3$,
azatém będzie.

$$A \left(P \frac{m}{n} = a^3 \times \frac{1}{3} \right) = a^1 = a.$$

$$B \left(\frac{m}{n} A Q = \frac{1}{3} a \times -\frac{b^3}{a^3} \right) = -\frac{b^3}{3a^2}.$$

Przeestroga 1. Sposoby te wyciągania ścian przez terminy nieskończone, któreby się zbliżały do doskonałej ściany, służą do wynalezienia płaszczyzn ziemiomierznych, długości linii krzywych, wymiaru wierzchołków brył, i innych wielkiej wagi Mechanicznych robót, przeto obszérniéj tu niéco są wyłożone.

Przeestroga 2. W stopniach niedoskonałych można częstokroć prześtać na wyciągniętej ścianie w terminach całkowitych, kiedy nie wiele zależy na téj reszcie, która po wyciągnięciu terminu ostatniego zostaje, kiedy zaś z opuszczenia téj reszty znaczny iaki brak mógłby wyniknąć, trzeba koniecznie albo danych Algebraicznych sposobów na wyciąganie ściany przez przybliżanie użyć, albo obróciwszy litery cały niedoskonały stopień wyrażające na liczby, za które też litery założone były na początku działania, Arytmetycznym sposobem rzeczzone ściany wyciągać, o którym w następującym Rozdziale.

R O Z D Z I A Ł III.

O Wyciąganiu ścian z liczb pospolitych.

ZE przy wyciąganiu ścian z ilkości Algebraicznych wyższo-stopniowych nieuchronna zdarza się potrzeba wyciągania tychże ścian z liczb pospolitych dlatego: iż w rozwiązywaniu Problematów składanych Ekwacye
nie

nie samemi literami wyrażone bywają, lecz miéwają częstokroć i liczby przyłączone, a choćby i samemi się tylko literami wyrażały, te iednak obracają się na liczby przy końcu działania, a ztąd nieuchronna wynika potrzeba wyciągania z nich ścian Arytmetycznym sposobem, a że dostatecznéj nauki o wyciąganiu ścian z liczb wyższostopniowych w Arytmetykach Oyczytym językiem dotąd wydanych nie mamy, przeto: że téj nauki dać bez poprzedzającéy Algebry trudno było; dlatego za rzecz użyteczną sądzę, zbiór onéy iak naydokładniejszy do téy części Algebry przyłączyć.

§ X. O Składzie i rozbiorze Czworogrannów liczbowych.

Lubo Formuła ogólna wyżéy opisana $a^2 + 2ab + b^2$, albo $a^2 - 2ab + b^2$ doskonale okazuje cały skład i każdą zosobną część czworogranu nie mniéy w liczbach, iako w ilkościach Algebraicznych do 2giego stopnia wyniesionych, wyrażając *naprzód*: czworogran 1go terminu ściany przez a^2 ; *powtóre*: dwóykę 1wszego terminu rozmnożoną przez termin 2gi wyrażając przez $+ 2ab$ albo $- 2ab$; *potrzebie*: czworogran 2go terminu przez b^2 ; że iednak w liczbie czworogrannéy części te nie tak są widoczne, iak w czworogranie Algebraiczn: gdyż w liczbach przerzeczzone części iedne z drugiem i zmieszane, przeto nie
dostyc

dosyć jest na tém, co się w Rozd: II. powiedziało o czworogranach, trzeba nadto następujących wiadomości:

1. Jeżeli dana liczba czworogranna iedną lub dwiema figurami jest wyrażona, ściana iéy czworogranna iedną tylko wyraża się figurą, a ta łatwo się znajdzie w Głowie każdego w używaniu Rachmistrzowską szrukę mającego, albo w Tabliczce niżej położonéy zawierającéy w sobie różne stopnie i ich ściany.

Ściany	Czworo- grany.	Sześćcio- grany.	4te Sto- pnie.	5te Sto- pnie.
1	1	1	1	1.
2	4	8	16	32.
3	9	27	81	243.
4	16	64	256	1024.
5	25	125	625	3125.
6	36	216	1296	7776.
7	49	343	2401	16807.
8	64	512	4096	32768.
9	81	729	6561	59049.

Gdzie widoczna : że każda z liczb czworogrannych w zgięty kolumnie umieszczonych ścianę ma wyrażoną jedną tylko figurą ; tak np: 49 ma 7, 64 ma 8 *i t. d.* Przyczyna tego jest : iż najmnieysza ściana czworogranna składająca się ze dwóch figur jest liczba 10 , a ięty czworogran 100 jest ze trzech już figur złożony ; toć czworogran z iedney lub dwóch figur złożony ściany nie może mieć tylko jedną figurą wyrażoną. Jeżeli zaś liczba iaka czworogranna 3 albo 4 figury w sobie zawiera , ściana jęty ze 2 tylko figur składać się powinna , gdyż naywiększa ściana czworogranna ze 2 figur złożona jest 99 , a przecię czworogran ięty 9801 nie składa się tylko ze 4 figur. Naymnieysza zaś ściana ze 3 figur składająca się jest 100 , którey czworogran 10,000 zawiera figur 5. Jeżeli znowu dany czworogran złożony jest z 5 lub 6 figur , ściana iego 3 tylko figury mieć w sobie powinna ; ponieważ naywiększa o 3 figurach ściana jest 999 , którey czworogran 998,001 nie ma w sobie tylko 6 figur , a najmnieysza ściana o 4 figurach jest 1000 , którey czworogran 1,000,000 zamyka w sobie 7 figur *i t. d.*

Zkąd się wnosi : że liczbę czworogranną króskami tak przedzieliwszy , zaczynając od ręki prawey ; żeby w każdéy przedziałce po dwie figur było prócz ostatniéy , gdzie iedna tylko czasem bywa , łatwo dowiedzieć się można :

zna: z wielu figur ściana tegoż czworogranu ma się składać. Jle bowiem w czworogranie zrobionych przedziałek, tyle będzie figur po-
mienioną ścianę składających; tak np: że w czworogranie: $3 \mid 74 \mid 24$, trzy są przedziałki, toć w ścianie jego trzy muszą być figury *i t. d.*

II. Zeby już poznać jak naydoskonalej cały skład liczby czworogrannéy, i dóść każdej części do składu iéy należnéy, weźmy przed oczy czworogran np: 529 zrobiony z ściany czworogrannéy 23. Wszakże, *naprzód*, iako ściana przerzeczona ze dwóch tylko figur jest złożona, tak czworogran 529 dwie tylko może mieć w sobie przedziałki to jest: $5 \mid 29$; *powtóre*: iwsza po lewéy stronie figura 2 ściany 23 jest na miejscu dziesiątków, więc w rzeczy saméy jest $= 20$, azatém czworogran iéy będzie $20 \times 20 = 400$. Lecz ten czworogran jest iwszą częścią w składzie liczby: $5 \mid 29$ przez § VI, więc zawierać się powinien w iwszéy przedziałce jéy po lewéy stronie to jest: w liczbie 5, *potrzebie*: 2ga figura téyże ściany 23 czyli 3 jest pojedyncza, bo jest na miejscu jedności, więc mnożąc przez nią dwóykę iwszego terminu 2 zostającego na miejscu dziesiątków $= 40$, będzie 40×3 produkt $= 120$. Aże dwóyka iwszego terminu ściennego rozmnożona przez 2gi jest drugą częścią liczby czworogrannéy przez wzmiankowany § VI; więc 120 zamykać się musi

musi w reście 1wszý przedziałki danego czworogranu 5 | 29, która tu jest — 1 i w 1wszý figurze przedziałki 2giý to jest: w liczbie 2; *naofstatek*: termin 2gi ścienny 3 wyniółszy do 2go stopnia, będzie czworogran — 9. Aże czworogran tego terminu jest 3cią częścią składającą czworogran dany przez tenże § VI; więc mieścić się będzie w reście 2giý jego przedziałki, to jest w liczbie 9. Cały tedy skład danego czworogranu mającego ścianę ze dwóch terminów złożoną le-dwie nie tak oczywiście daje się widzieć w liczbach, iako w czworogranie Algebraicznym: $a^2 + 2ab + b^2$.

Wzór tego składu. Czworogran. Sciana.

- I. Czworog: 1go term: 5 | 2 9. 23.
ścien: to jest licz: $2 \times 2 = 4$ 0 0.
- II. Dwóyka tegoż terminu
rozmnożona przez 2gi,
to jest: $4 \times 3 = 12$ 0.
- III. Czworogran terminu
2giego, czyli $3 \times 3 = 9$.
Części te w iedną sumę — —
zebrane = 5 2 9.

Skąd się ogólnie wnosi: że, kiedy dany czworogran dwie ma w sobie przedziałki, a za-tém i w ścianie swoiý dwa terminy, wten czas *naprzód*: czworogran 1wszego terminu ściennego zamyka się w 1wszý przedziałce danego

danego czworogranu ; *powtóre* : dwóyka tegoż terminu rozmnożona przez termin 2gi mieści się w reszcie 1wszýj przedziałki, jeżeli iaka jest, i w 1wszýj figurze przedziałki 2giéy ; *potrzecie* : czworogran 2go terminu zawiera się w reszcie téżże przedziałki 2giéy.

III. Chcąc zaś poznać skład czworogranu mającego ścianę ze 3 terminów złożoną, weźmy np: czworogran 5 | 4 7 | 5 6 zrobiony z ściany 234. Wszakże *naprzód* : iako ściana ta nie ma w sobie tylko 3 figury, tak i czworogran tylko 3 przedziałki ; *powtóre* : 1wszy z lewýj strony termin ścienny 2 jest na miejscu set, więc $\equiv 200$, a zatem czworogran jego $200 \times 200 \equiv 40,000$ zawierać się musi w 1wszýj z lewýj ręki przedziałce danego czworogranu to jest : w liczbie 5 ; *potrzecie* : 2gi termin ścienny 3 jest na miejscu dziesiątków, więc $\equiv 30$, więc dwóyka terminu 1wszego $\equiv 4$ rozmnożona przez 2gi $\equiv 3$ uczyni w rzeczy samej $400 \times 30 \equiv 12,000$, a zatem mieścić się będzie w reszcie 1wszýj przedziałki, która jest $\equiv 1$, i w 1wszýj figurze przedziałki 2giéy to jest : w liczbie 4 ; *poczwarte* : ponieważ 2gi ścienny termin 3 $\equiv 30$ (iako się rzekło) toć czworogran jego $30 \times 30 \equiv 900$ zawierać się musi w reszcie figury 1wszýj czyli w liczbie 2 i w drugiéj figurze téżże 2giéy przedziałki to jest : w liczbie 7. Ze zaś dany czworogran 5 | 4 7 | 5 6 ścianę ma ze trzech figur złożoną dla 3 w nim przedziałek ;
więc

więc odkrywſzy przerzeczonym ſpoſobem czę-
 ſci dwóch 1wſzych terminów ſciennych w ſkład
 czworogranu danego wchodzących , ukazać
 nadto trzeba ukryte w nim te części , które
 z 3go terminu ſciennego tamże weſzły. Po-
 trzeba więc prócz tego, co ſię dotąd robiło,
 1wſze dwa z lewéy ſtrony terminy to ieſt 23
 brać za ieden termin ſcienny to ieſt : za termin
 1wſzy , 3cią zaś figurę ſcienną to ieſt: 4 za
 termin 2gi tak, iak ſię działało w § VI, odkry-
 wając ſkład czworogranów Algebraicznych.
 Aże 1wſze dwa terminy ſcienne ſą na mieyſcu
 ſet i dziesiątków , będą więc $23 = 230$; bio-
 rąc ie zaś za ieden to ieſt : za 1wſzy, będzie
 dwóyka terminu 1wſzego rozmnożona przez
 2gi , którym tu ieſt 3ci , czyli $460 \times 4 =$
 1840 , która nie tylko w reſcie 2giéy prze-
 działki ; lecz i w 1wſzéy figurze przedziałki
 3ciéy danego czworogranu mieſci ſię to ieſt
 w liczbach 185 , czworogran zaś 2go ſcien-
 nego terminu (którym tu ieſt 3cią figura 4)
 $= 16$ zawiera ſię w reſcie téż 3ciéy prze-
 działki , czyli w liczbie 16. Co wſzyſtko
 pod oko podpada w naſtępującym rozbiore:

Wzór

Wzór składu.

Czworogran. Ściana.

I. Czworog: term: 1go 5, 4 7, 5 6. 234.
ściennego to jest $2 \times 2 = 4, 0000$.

II. Dwóyka term: 1go
rozmnoż: przez 2gi,
czyli $4 \times 3 = 12000$,

III. Czworogran term:
2go czyli $3 \times 3 = 900$,

IV. Biorąc 2. term: 23
za 1, dwóyka ich
 $46 \times 4 = 1840$.

V. Czworogran termin:
2go czyli 3cię figu-
ry $4 \times 4 = 16$.

Summa $= 54756$.

Przeto jeżeli ściana danéy czworogrannéy liczby z 3 figur składa się, a dwie 1wsze z lewéy strony biorą się za 1wszy termin ścienny, trzecia zaś za 2gi; ogólnie wnieść się może *naprzód*: że dwóyka terminu 1wszego tak wziętego rozmnożona przez termin 2gi, czyli figurę 3cią umieszczona będzie w reście drugiéy przedziałki danego czworogranu i w 1wziéy figurze przedziałki 3ciéy; *ponwtóre*: że czworogran 2go terminu ściennego będzie zamknięty w reście téżé przedziałki 3ciéy. Co tak oczywście daie się widzieć, iako w czworogranie Algebr: $a^2 * zab * zac * zbc + b^2 * c^2$ mającym ścianę trzykrotną: $a * b * c$,
Jako

Jako bowiem w tym jest *naprzód*: a^2 czyli czworogran 1wszego terminu ściennego; jest *ponióre*: $2ab$ czyli dwówka terminu 1wszego a rozmnożona przez termin 2gi b , jest *potrzebie*: b^2 czyli czworogran terminu 2go b ; jest *poczwarte*: $2ac + 2bc$, czyli biorąc dwa 1włe terminy $a + b$ za ieden, dwówka z nich $2a + 2b$ rozmnożona przez 2gi termin to jest przez 3cią figurę c , jest *popięte*: c^2 czyli czworogran 2go terminu albo 3cięy figury c przez § VI; tak w danéy czworogrannéy liczbie 5,47,56 wszystkie te części są widoczne.

IV. Gdyby zaś dany czworogran miał ścianę ze 4rech terminów złożoną, iaki jest ten: 5,48,02,81 mający ścianę: 2341; wtenczas ukazawszy tak, iak się czyniło dotąd, w rzeczonym czworogranie *naprzód* części dwóch 1włych terminów ściennych, potem części trzech 1włych za dwa wziętych, trzeba nadto dla 4tego terminu ścianę składającego brać 1włe trzy za ieden, a 4ty za 2gi, i znowu tak wziętego 1wszego terminu dwóykę przez termin 2gi (to jest przez figurę 4tą) rozmnożoną odkrywać, która zapewne będzie się zamykała w ręście 3cięy przedziałki danego czworogranu i w 1wszēy figurze przedziałki 4tēy, a czworogran ostatniego terminu znajdzie się w ręście ostatniēy przedziałki.

Wzór składu.

Czworogran. Sciana.

5,48,02,81. 2341.

I. Czworogr: term: 1go = 4000000

Dwójka term: 1go

przez 2gi rozmnoż:

czyli $4 \times 3 = 12,000000$

Czworogr term: 2go

to jest $3 \times 3 = 900000$

II. Biorąc dwa terminy za

jed: dwójka ich $46 \times 4 = 184000$

Czworogran term:

2go $4 \times 4 = 1600$

III. Biorąc trzy terminy:

2 3 4 za jeden, dwój-

ka ich $468 \times 1 = 4680$

Czworog: 2go term:

 $1 \times 1 =$

1

Summa = 5480281.

Co równie jasnie pokazuje się iako i w Algebraicznym czworogranie: $a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd + b^2 + c^2 + d^2$, którego ściana czworogranna jest: $a + b + c + d$.

V. Gdy nakoniec danego czworogranu ściana jest z 5, 6, lub więcej jeszcze terminów złożona, wtenczas brać trzeba naprzód i wśze dwa terminy ściennie pojedynczo, potem dwa i wśze za jeden, toż 3 i wśze za 1, toż dopiero 4 lub 5 za 1, a ostatni za 2gi, i ka-
żdą zolobna tę część odkrywać w przedział-
kach

kach danego czworogranu. Do czego nie zatrudniając się robotą długą czworogranów Algebraicznych mających ściany wielokrotne, użyć można formuły ogólnéy: $a^2 + 2ab + b^2$, za który pomocy naprzód i wśszych dwóch terminów pojedynczo wziętych pokazać części $= a^2 + 2ab + b^2$, potem $2ab + b^2$ tychże dwóch terminów za ieden wziętych, toż wziętych za 3 lub 4. i. t. d. Oto tego wizerunek:

Formuła.	Czworogran.	Sciana.
	(5, 48, 26, 22, 25)	23415.
I. $a^2 =$	4	
$+ 2ab =$	12	
$+ b^2 =$	9	
II. $+ 2ab =$	184	
$+ b^2 =$	16	
III. $+ 2ab =$	468	
$+ b^2 =$	1	
IV. $+ 2ab =$	2341	
$+ b^2 =$	25	

Summa = 5482622.25.

§ XI. Jak się wyciąga ściana czworogranna z danéy czworogrannéy liczby?

Przepis 1. Dany czworogran okréśliwszy, dzielę na części tak, żeby w każdéy przedziałce po dwie było figur; będzie niezawodnie ściana z tylu figur złożona, ile iest w

Dz

liczbie

liczbie czworogrannéy przedziałek z przyczyny w § X. obszérnie wyłuszczoney.

2. Jeżeli dany czworogran ma dwie tylko przedziałki, biorę, zaczynając z lewéy strony, i widać, w któręy zawiera się czworogran i wższego terminu ściennego i szukam tego czworogranu w tabliczce wyżej położonéy, gdzie się albo równy albo mało co mniejszy znajdzie, a ścianę swoję na przeciwko pokazę; którą za i wższy termin ścienny czworogranu danego kładę, czworogran zaś iego odciągam od i wższyć przedziałki, resztę notując.

3. Do téy reszty (jeżeli iaka została) składam zgą przedziałkę, jeżeli zaś żadnéy nie masz reszty, tedy samą zgą przedziałkę złożysz, ostatnią ięć figurę odcinam, a i wższe z lewéy strony figury dzielę przez dwóykę i wższego terminu ściennego przez *Przep:* 2. znalezione, wieloraz będzie zgim ściennym terminem, który przyłączam do dzielnika to jest do wzmiankowaney dwóyki, i przez niego tak też dwóykę, iako i iego samego mnożę, a produkt odciągam od reszty danego czworogranu. Niech będzie np:

Czworogran. Sciana.

(5, 2 9) 23.

A. 4.

B. 1 2, 9.

C. 4 3.

D. 1 2 9.

Przy A

Przy A jest czworogran z tabliczki wzięty od 1wszhey danego czworogranu części to jest od 5 mało co mnieyszy, którego ściana $\equiv 2$ jest 1wszym terminem ściennym. Przy B 1wsza figura 1 jest reszta pozostała po odciągnięciu 4 od 5, do której 2ga przedziałka 29 złożona i ostatnia ięcy figura 9 jest odcięta.

Przy C 1wsza figura 4 jest dwóyka 1wszego terminu ściennego, przez którą dzieli się liczba 12 to jest reszta 1wszhey przedziałki i 1wsza figura 2gięcy, a wieloraz 3 za 2gi termin ściany ogólny jest napisany. Przy témże C do dzielnika 4 przyłącza się wieloraz jego czyli 2gi termin ścienny 3, i staie się 43, co rozmnożywszy przez tenże sam termin czyli przez 3, wypada za produkt liczba niżey przy D napisana, i liniyką podkreślona, którą odciągnąwszy od liczby B czyli od 129 nic nie zostaje, azatém czworogranu 529 ściana wynaleziona $\equiv 23$.

4. Jeżeli dany czworogran więcej niż dwie ma w sobie przedziałki, ściana jego więcej także niż dwa terminy zawierać musi, azatém wynalazłszy, przez dane przepisy, dwa 1wsze, brać trzeba za jeden termin ścienny, 3ci zaś ięszcze niewiadomy za 2gi, i tymże samym sposobem, który jest wyżey przepisany, następujący termin wyciągać, to jest: do reszty, ięzli iaka po 2giém odciągnięciu została. złożyc trzecią przedziałkę, i tę, odciąwszy ostatnią figurę, dzielić przez dwoykę terminu 1wszego

go (biorąc zań, iako się rzekło, dwie figury ściennie) i tak wciąż działać, iak piérwéy. A ieśli po-wyciągnięciu trzech terminów ściennych, 4ta ieszcze będzie w danym czworogranie przedziałka, tedy 3 terminy wynalezione za 1wszy wziąwszy a 4ty niewiadomy za 2gi, toż samo czynić, co się dotąd czyniło. Niech będzie np:

	Czworogran.	Scianna.
	(1, 7 4, 2 4.)	1 3 2.
A.	1.	
B.	7, 4	
C.	2 3	
D.	6 9	
E.	5 2, 4	
F.	2 6 2	
G.	5 2 4.	

Przy A iest czworogran z tabliczki wzięty równy 1wszému liczbie zawartém w 1wszém po lewém stronie przedziałce, którego ściana = 1 kładzie się za 1wszy termin ścienny, a czworogran iego = 1 odciągnięty od przedziałki 1wszému, żadnym nie ma reszty. Przy B iest 2ga przedziałka 7 4, w którém ostatnia figura krę-

ską odciętą. Przy C i wśza figura 2 iest dwóy-
ka i wśzego terminu ściennego, przez którą
podzieliwśzy liczbę 7, wieloraz 3 kładzie się
za 2gi termin ogólny ściany i przyłącza się
do liczby 2 przy C, gdzie przez nią i przez
siebie samego mnoży się, a produkt 69 poło-
żony przy D odciąga się od B, a do reszty 5
przy E następująca składa się przedziałka. Przy
F iest dwóyka wynalezionych dwóch terminów
ściennych $\equiv 26$, przez którą liczba przy E
przed kręską położona to iest 52 dzieli się, a
wieloraz $\equiv 2$ za nowy termin ścienny kładzie
się, i do dzielnika 26 przyłącza się, toż cała
liczba przy F przezeń się mnoży, a produkt
524 przy G napisany od liczby E odciąga się
bez żadney reszty; cała więc wyciągnięta
ściana $\equiv 132$.

5. Gdyby się zaś zdarzyło, żeby dwóyka
terminu 1go była większa nad liczbę podzielną
czyli tę, którą dzielić trzeba; natenczas za
wieloraz albo za nowy termin ścienny piśze się
o, i składa się następująca przedziałka, która,
ostatnią odciawśzy figurę, dzieli się przez dwóy-
kę wszystkich terminów ściennych już wyn-
alezionych, wieloraz ślad wypadły, będzie no-
wym terminem ściennym, a dalsze działanie
przepisanym póydzie sposobem. Niech bę-
dzie np:

Czworogran. Ściana.

(4, 24, 3 6) 206.

A. 4

B. 2, 4

C. 4

D. 2 4 3, 6

E. 40 6

F. 2 4 3 6

Przy A jest czworogran z tabliczki wzięty. Przy B jest 2ga przedziałka. Przy C jest dwójka 1wszego terminu ściennego, która ponieważ i razu nie mieści się w liczbie 2 przy B położony, przeto za 2gi termin ścienny pisze się 0. Przy D do 2gięv 3cia przedziałka jest przyłączona. Przy E 1wsze dwie liczby 40 są dwójką dwóch terminów ściennych, przez które liczba 243 przy D dzieli się, a 6 oraz 0 za 3ci termin ścienny kładzie, tudzież od liczby 40 przy E przyłącza się, i cała ta liczba przez tenże sam termin mnoży się, a produkt 2436 przy F położony odciąga się od liczby D, po którym odciągnięciu gdy nic nie zostaje, ściana wyciągnioma jest = 206.

6. Jeżeli z sformanęv liczby wyciągać przyydzie ścianę czworograną, tę tak z licznika iako z mianownika podług dopięro danych

Przepi-

Przepisów zosobna wyciągać potrzeba np:

$$\sqrt[144]{\frac{144}{2}} = \frac{12}{2} = 6, \text{ gdyż iako } \sqrt{144} = 12, \\ \text{tak } \sqrt[4]{4} = 2.$$

Okazanie tych Przepisów.

Jako skład czworogranów w § X. wy-
 łuszczony pokazuje: że czworogran każdy nic
 innego nie jest tylko produkt ściany przez
 siebie rozmnożony, tak i Przepisy na wy-
 ciąganie ściany czworogrannéy dane dowodzą:
 że toż wyciąganie nic innego nie jest, tylko
 dzielenie czworogranu. Co nim się okaże,
 wprzód części tego dzielenia przełożę. Sam da-
 ny czworogran, z którego się ściana wyciąga,
 jest liczbą podzielną, ściana jego jest wielo-
 razem, a części w skład czworogranu wcho-
 dzące bywają dzielnikiem coraz innym czyli
 za wyciągnięciem każdego terminu ściennego
 nanowo wyszukanym, i tém się to jedynie od
 pospolitego liczb dzielenia ścian wyciąganie
 różni: że tamto dzielnika na wszystkie liczby
 podzielne miéwa jednego, to coraz innego,
 tamtego dzielnik bywa dany, tego w składzie
 podzielnyéy liczby nanowo wyszukany. Co
 żeby się jaśniej okazało, a tém samém dowio-
 dło: że przepisy na wyciąganie ścian czwo-
 rogrannych dane są niezawodne, weźmy na
 uwagę Czworogran 529 za wzór składu i roz-
 bioru czworogranów w § X, a za wzór wy-
 ciągania ścian czworogrannych w § XI poło-
 żony

żony. Wszakże *naprzód*: tam się pokazało: że czworogranu rzeczonoego 1wśza po lewéy stronie figura 5 zawiera w sobie czworogran 4 1wśzego terminu ściennego 2, tu zaś wyciągając z niego ścianę, czyli raczéy z tabliczki wziętą za 1wśzy termin ścienny kładąc, nic innego się nie czyni, tylko w rzeczy saméy wzmiankowana figura 5 dzieli się przez 2, a wieloraz 2 kładzie się za 1wśzy termin ścienny, i daléy, iak w dzieleniu pospolitém, produkt z rozmnożenia wieloraza przez dzielnika wypadły odciąga się od liczby podzielnéy, tak i tu czworogran 1wśzego terminu ściennego iako podobny tamtemu produkt odciąga się od 1wśzéy przedziałki danego czworogranu iako od swoiéy liczby podzielnéy, więc przepisy 1wśzy i 2gi są oczywiste. *Ponforte*: pokazało się w tymże przykładzie: iż w ręście przedziałki 1wśzéy i w 1wśzéy figurze, 2giéy przedziałki czyli w liczbie 12 zawiera się dwóyka 1go terminu ściennego rozmnożona przez 2gi, dlatego wyciągając tenże 2gi termin, liczba 12 podzieliła się przez rzeczoną dwóykę, to jest przez 4, a wieloraz 3 położył się za termin 2gi. Albowiem każdy produkt wypada z mnożenia dwóch liczb, z których mając jedną wiadomą i dzieląc przez nią tenże produkt znajduje się 2ga niewiadoma, co się i tu uczyniło, iako przez się rzecz widoczna, więc i tego terminu wyciąganie było dzieleniem czynionym przez nowo znalezione dzielnika

w skła-

w składzie liczby czworogrannéy. Dlatego zaś przy tymże dzielniku położył się wieloraz czyli termin 2gi ścienny, żeby, mnożąc przez niego samego całą liczbę 43, wypadła w produkcie dwójka 1wszego terminu ściennego rozmnożona przez 2gi z czworogranem tegoż 2go, i żeby obydwie te produkta odciągnięte były od reszty danego czworogranu, w którym są umieszczone; (co się jedynie czyni dla porządnego i krótszego działania) więc i 3ci przepis na regułach dzielenia i składzie wewnętrznym czworogranów zasadzony jest niezawodny. *Potrzenie:* Przepis 4 równie pewny jest iako i 3ci, ponieważ na iednymże z nim działaniu zasadza się, i tém tylko od niego różni się: że każde dwa terminy 1wsze ściany wyciągnionéy brać za ieden, a 3ciego szukać tak, iak 2go, dzieląc resztę danego czworogranu przez nowego dzielnika z dwójki dwóch terminów zrobionego, a tak i tu oczywista: że wyciąganie ściany jest dzieleniem z składem i rozbiorem czworogranów zgodném. *Poczwarte:* Przepis 5. tenże sam jest, którego się w zwyczajném liczb dzieleniu trzymamy, gdzie jeżeli dzielnik w liczbie podzielnej nie mieści się ani razu, za wieloraz piszemy 0, a do liczby podzielnej następującą składamy figurę i t.d.

Przepis ostatni przez się iasny. Jeżeli bowiem wynosząc łamaną liczbę do 2go stopnia, wynosimy naprzód licznika, potem mianowni-

ka

ka, iako się mówiło w § II, toć wyciągając z nięć ścianę czworograną, wyciągnąć ją powinniśmy naprzód z licznika, toż z mianownika.

Przestroga 1. Gdyby w danym czworogranie po ostatecznym odciągnięciu reszta iaka została; znakbyto był: iż dany czworogran nie jest doskonały i ściana jego nie jest rzeczywista, czyli taka, któraby się mogła wyrazić liczbą; więc w tym razie trzeba wyciąganie ściany kontynuować przez przybliżanie, *per approximationem*, co się następującym sposobem robi. Niech będzie dana liczba niedoskonale czworogranna 147, z której podług daney nauki ścianę $\equiv 12$ wyciągnąwszy, zostanie reszta $\equiv 3$, którą obracam na frakcyą mającą za mianownika 1, potem przydaję do licznika i mianownika po parze, lub po tyle par cyfer, ile mi się podoba, stanie się frakcyą $\frac{300}{100} \equiv 3$, to jest równa reszcie, która była została, dopiero wyciągam ścianę czworograną pojedynczo z licznika i z mianownika podług danych przepisów, cyfry biorąc zawsze za przyłączoną przedziałkę, to jest: wziąwszy naprzód licznika 30,0, dwie 1wsze kreską odłączone liczby dzielę przez dwóykę ściany wynalezionę 12 czyli przez 24, wieloraz $\equiv 1$ będzie licznikiem frakcyi nowy termin ścienny wyrażać mającý, mianownikiem zaś nowym będzie wyciągniona z 1wszego mianownika 100 ściana $\equiv 10$, azatém
wzmian-

wzmiankowanego niedoskonałego czworogranu
ściana dotąd ciągniona będzie $= 12 \frac{1}{10}$, ale
że i po tém odciągnięciu zostaje reszta 59,
gdyż przez Przepis 3ci, do dzielnika 24 przyśła-
czając wieloraz 1 tak, żeby się stała liczba $=$
241, a tę liczbę, bez mnożenia iéy przez
tenże sam wieloraz, bo 1 nie mnoży, odcia-
gając od 300, zostaje reszta 59, w której
ukryta ieszcze jest iakaś częśćka ściany czwo-
rogrannéy. Szukając iéy więc przez przybli-
żanie, dodając znowu tak do reszty téy, iako i
do mianownika iwszego tyle par cyfer, ile
przedtém, będzie frakcyja $\frac{5900}{10000}$; tego już mia-
nownika ściana czworogranna jest $= 100$;
z licznika zaś wyciągniona tak, iak piérwéy, bę-
dzie $= 2$. Albowiem napisawszy tak, iak przed-
tém 590,0, i 590 podzieliwszy przez dwóykę ter-
minów ściennych wynalezionych to jest: przez
242 (biorąc z całkowitemi razem i licznika fra-
kcyi) wypadnie wieloraz $= 2$ za licznika no-
wego terminu ściennego frakcyją także wyra-
żać się mającego, azatém ciągniona dotąd
ściana będzie $= 12 \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$. Lecz i tu ie-
szcze jest reszta $= 1056$, w której częśćka
iakaś ściany ukryta jest. Reszta ta taką wy-
razi się frakcyją $\frac{105600}{1000000}$, której mianownika ścia-
na jest $= 1000$, z licznika zaś wyciągną-
wszy podług przepisów danych, będzie $= 4$
i t. d. bez końca.

Przeestroga 2. chcąc doświadczyć ściany
wyciągnionéy, wynieść ją trzeba do 2go sto-
pnia, a resztę, jeżeli iaka przy ciągnięciu
została,

została, do tegoż stopnia przydać, stopień ten jeżeli dany wróci czworogran, znakiem będzie: że ściana dobrze z niego wyciągniona.

§ XII. O składzie i rozbiórze Sześciogranów liczbowych.

I. Chcąc gruntownie poznać skład wewnętrzny sześciogrannej liczby, potrzeba naprzód wiedzieć: z wielu terminów ma ścianę swoją złożoną taż liczba, powtóre: iak te terminy ściennie do składu ię wewnętrznego wpływają. Co do iwszego, nie łatwicytęgo, iak dowiedzieć się o liczbie terminów ściany sześciogrannej. Podzieliwszy bowiem dany sześciogran tak, żeby w każdéj przedziałce po trzy były liczby (prócz ostatniéj z lewéj strony przedziałki, gdzie dwie lub jedna tylko być może) tyle niepochybnie będzie terminów ściennych, ile przedziałek w danym sześciogranie. Przyczyna tego iest ta: iż sześciograny wypadają z mnożenia, kiedy liczba iaka za ścianę sześciogranną wzięta mnoży się naprzód przez siebie samą, potem przez produkt z iwszego mnożenia wypadły; toć ile figur w takiéj liczbie czyli ścianie iest, tyle szczególnych produktów z mnożenia wypadać musi, aże te szczególne produkta są częściami składającemi sześciogran, toć tyle tych części czyli przedziałek w sześciogranie być powinno, ile iest figur w liczbie mnożnéj za ścianę sześciogranną wziętęj, i przeciwnie,
ile

ile części czyli przedziałek , tyle figur w ścianie sześciogrannéy. Co z natury samego mnożenia wypływa. Co do 2go; żeby się dowiedzieć: iak terminy ściennie do wewnętrznego składu liczby sześciogrannéy wchodzi , i żeby ie w niéy widocznie pokazać ; trzeba wziąć formułę w § VII. opisaną , to iest: $a^3 \mp 3a^2b \mp 3ab^2 \mp b^3$ wyrażającą części , z których się składa d skonały sześciogran mający dwukrotną czyli ze dwóch terminów złożoną ścianę $a \mp b$. Formuła ta widocznie pokazuje skład cały sześciogrannéy liczby mającey ścianę z 2 terminów złożoną , to iest pokazuje : że przerzeczona liczba ma w sobie I. sześciogran iwszego terminu ściennego wyrażony przez a^3 . II. Ma troisty czworogran tegoż iwszego terminu rozmnożony przez termin 2gi , co się wyraża przez $3a^2b$. III. Ma ielzcze troisty termin iwszy rozmnożony przez czworogran terminu 2go , co się wyraża przez $3ab^2$. IV. Ma nadto sześciogran terminu 2go wyrażony przez b^3 . Skąd łatwo i to wniesć można : że iwsza z tych części to iest sześciogran terminu iwszego zawierać się musi w pierwszy przedziałce danego sześciogranu , 2ga w reście iwszém przedziałki i w iwszém figurze 2giém przedziałki , 3cia w reście téżém iwszém figury i w całem 2giém , 4ta w pozostałym reście przedziałki 2giém. Skład ten da się jasnie widzieć w następującym przykładzie :

Wzór

Wzór składu.

Sześciogr: Sciana.

(12, 167) 23.

I. Sześciogran termin: 1go

to iest: $20 \times 20 \times 20 = 8000$

II. Troisty Czworog: term:

1go rozmnożony przez 2gi

to iest: $1200 \times 3 = 3600$

III. Troisty term: 1wszy przez

2go czworogran rozmnożo:

to iest: $60 \times 9 = 540$

IV. Sześciogr: term: 2go to

iest: $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Summa tychże części = 12167.

II. Z równą łatwością odkryć można części i w takim sześciogranie, którego ścianą iest ze 3³ terminów złożona, o tém tylko pamiętać tu potrzeba; żeby w 1wszych dwóch przedziałkach odkrywszy części 1wszych 2óch terminów ściennych, to iest sześciogran 1go terminu ściennego, troisty czworogran terminu 1wszego rozmnożony przez termin 2gi, troisty termin 1wszy rozmnożony przez czworogran 2go, i sześciogran tegoż 2go terminu; żeby mówię, dla pokazania pozostałych w danym sześciogranie części brać dwa 1wsze terminy ściany znalezionej za ieden, a 3ci iestcześnie niewiadomy za 2gi, i znowu nowe terminy podobnie, iak pierwszy, odkrywać w reszcie przedziałki 2gię i w 3cięj caicy przedziałce

ce, to jest: pokazać tam troisty czworogran iwszego terminu (dwa za ieden biorąc) rozmnożony przez 2gi (którym tu będzie 3ci) potem troisty termin iwszy rozmnożony przez czworogran 2go, nakoniec sześciogran 2go terminu. Rozbiór ten snadniéy i bez omyłki poydzie, zażywając do niego formuły ogólney. Niech będzie *np*:

Formuła.

Sześciogran. Sciana.

(11,390,625) — 225.

I. Biorąc pojedynczo 2

terminy ścienne, bę-

dzie: $a^3 = 8000000.$

II. * $3a^2b = 2400000.$

III. * $3ab^2 = 240000.$

IV. * $b^3 = 8000.$

V. Biorąc dwa iwsze za

ieden, będzie: $3a^2b = 726000.$

VI. * $3ab^2 = 16500.$

VII. * $b^3 = 125.$

Summa = 11 390 625.

Gdzie I. a^3 pokazuje sześciogran iwszego terminu ściennego 2 czyli $200 \times 200 \times 200 = 8,000,000.$ II. $3a^2b$ wyraża troisty czworogran tegoż terminu 1go rozmnożony przez 2gi to jest: $120000 \times 20 = 2,400,000.$ III. $3ab^2$ pokazuje troisty termin iwszy rozmnożony przez czworogran terminu 2go to jest: $600 \times 400 = 240,000.$ IV. b^3 pokazuje sześciogran terminu 2go to jest: $20 \times 20 \times 20 = 8000.$ V. $3a^2b$ wyraża troisty czworogran

E dwóch

dwóch terminów 1włznych za ieden wziętych rozmnożony przez termin 3ci za drugi wzięty to iest: $145200 \times 5 = 726,000$. VI. $3ab^2$ wyraża troisty termin 1włzy, wzięwszy za ieden dwa, rozmnożony przez czworogran 2go to iest: $660 \times 25 = 16500$. Naostatek b^3 pokazuje sześciogran 2go terminu ściennego to iest liczby 5, który iest $= 125$, a te wszystkie części w iedną sumę znieśli one przywracają dany (Sześciogran.)

III. Podobnym sposobem pokazać można skład sześciogranu mającego ścianę z 4 i więcej terminów złożoną, byle brać naprzód 2 1włze terminy ściennie pojedynczo, potem 1włze 2 razem za 1, a 3ci za 2gi; toż 3 razem 1włze za jeden, a 4ty za 2gi i t. d. do caŃey téy roboty tak używając formuły, iako się pokazało w 1. przykładzie. Niech będzie ieszcze.

Formuła.	Sześciogran.	Scianna.
	1,869,959,168.	1232.
I. $a^3 =$	I	
$* 3a^2b =$	6	
$* 3ab^2 =$	I 2	
$* b^3 =$	8	
II. $3a^2b =$	I 296	
$* 3ab^2 =$	324	
$* b^3 =$	27	
III. $3a^2b =$	90774	
$* 3ab^2 =$	1476	
$* b^3 =$	8	
<hr/>		
Summa =	1869959168.	

§ XIII. Jak się wyciąga ściana sześciogranna z daney w trzecim stopniu liczby?

I. Mając wiadomy skład liczby sześciogrannéy, nie dozna się żadnéy trudności w wyciąganiu ściany jéy. Do tego bowiem dość będzie mieć przed oczyma Formułę sześciogranną: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ i podług następujących przepisów działać.

Przepis 1. Dany sześciogran określwszy i na części tak podzieliwszy, żeby w każdéy przedziałce po 3 były liczby, iako się powiedziało; brać trzeba 1wszą z lewéy strony przedziałkę, gdzie się mieści sześciogran 1wszego terminu ściennego wyrażony przez a^3 , a tego poszukawszy na tabliczce pod § X. położonéy, i równy albo blisko przychylający się tam znalazłszy, ścianę jego tamże znajdującą się za 1wszym terminu ściennym napisać, jego zaś samego od 1wszéy przedziałki odciągnąć, i resztę pod linią zanotować.

Przepis 2. Do reszty, jeżeli iaka została, zgą złożyć przedziałkę, a jeżeli żadnéy nie ma, reszty, samą przedziałkę zgą niżej spuścić i dwie ostatnie figury kręską odciąć, gdzie się 3 części ściennie zawierają, to jest: troisty czworogran terminu 1go ściennego rozmnożony przez 2gi, troisty termin 1wzły rozmnożony przez czworogran 2go, i sześciogran 2go terminu, czyli: $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, a zatem chcąc wynaleść termin 2gi ścienny, trzeba re-

E2 szc

szkę i wśzę przedziałki i i wśzą figurę zgięty
 podzielić przez $3a^2$ to jest przez tróisty czwo-
 rogran terminu i wśzego ściennego już znale-
 zionego, wieloraz będzie zgim terminem
 ściennym, który mając, trzeba przerzeczóné
 wszystkie 3 części z wynalezionych dwóch ter-
 minów ściennych porobić, to jest *naprzód*: z i-
 wśzego terminu ściennego zrobiony czworog-
 ran i trzy razy wzięty rozmnożyć przez ter-
 min zgi, a produkt ten tak pod resztą i wśzę
 przedziałki i pod przedziałką $2ga$ pisać, żeby
 ostatnia jego figura padła pod i wśzą figurę
 zgięty przedziałki; *powtóre*: z 2go terminu
 ściennego zrobiony czworogran rozmnożyć
 przez tróykę terminu i wśzego, a produkt ten
 tak znowu pisać, żeby ostatnia jego figura
 padła pod drugą figurę zgięty przedziałki. *po-
 trzecie*: szesciogran z 3go terminu zrobiony
 pisać tak, żeby ostatnia jego figura była pod
 ostatnią figurą téżże przedziałki zgięty. *Na-
 ostatek*: trzy te produkta w jedną sumnę ze-
 brać, i od resztzy tak i wśzę przedziałki,
 jeżeli jest iaka, iako i zgięty odciągnąć, a ie-
 żli doskonały jest szesciogran dany i dwie tyl-
 ko ma w sobie przedziałki, ściana jego ze 2
 terminów złożona tym sposobem zupełnie bę-
 dzie wyciągniona. Gdzie pilnie uważać po-
 trzeba tak rzeczoną sumnę, iako i resztę,
 żeby i wśza od zgięty albo mnieysza była, albo
 iey równa, inaczey znak będzie: że dzielnik
 nie tyle razy mieści się w podzielney lic-
 bie,

bie, ile jest brany; przeto wieloraz trzeba znów szukać iednością i na nowo szukać produktów.

Przepis 3. Jeśli 3cia ieszcze jest przedziałka w danym sześciogranie, tedy ta do reszty, jeżeli iaka została, przyłączona zamykać w sobie będzie I. $3a^2$, to jest: troisty czworogran 1wszego terminu ściennego (ale tu już za 1wszy termin brać trzeba obydwie 1wsze wynalezione) rozmnożony przez termin 2gi, którym w tym razie będzie termin 3ci ścienny ieszcze niewiadomy; II. $3ab^2$, to jest czworogran terminu 2go (którym tu będzie 3ci, jak się rzekło) rozmnożony przez troisty termin 1wszy ze dwóch złożony; III. b^3 to jest: sześciogran terminu 2go, którym będzie 3ci ieszcze niewiadomy, a zatem chcąc go wynaleść, trzeba resztę, jeżeli jest iaka, 2giey przedziałki i 1wszą figurę 3ciey przedziałki krótką odłączoną podzielić przez $3a^2$ czyli przez troisty czworogran terminu 1go, dwa razem za ieden biorąc, wieloraz stać wypady da termin 3ci ścienny sześciogranney. Ten już mając, znówu sposobem w 2gim przepisie podanym troisty czworogran terminu 1wszego (biorąc zawsze dwa za ieden) rozmnożywszy przez termin 2gi tak piąć pod resztą 2giey i pod 1wszą figurą 3ciey przedziałki, żeby ostatnia jego figura była pod 1wszą figurą przedziałki 3ciey, a czworogran 2go terminu rozmnożony przez troisty termin 1wszy żeby

miał

miał ostatnią swą figurę pod przedostatnią figurą téż przedziałki, pod ostatnią zaś sześciogran 2go terminu, które to części w jedną sumę zniezione i od reszty 2gię i 3cię przedziałki odciągnięte nie zostawiając innę reszty, pokażą: że ściana trzykrotna zupełnie wyciągniona.

Przepis 4. Podobnym sposobem wyciąganie ściany ze czterech lub więcej ielcze figur złożonęj odprawi się, byle przystępując do 4tęj przedziałki, trzy i wsze terminy ściennie wynalezione za jeden się brały, to jest za iwszy, a 4ty niewiadomy za 2gi termin, przystępując zaś do przedziałki 5tęj, żeby cztery wiadome za iwszy, a 5ty niewiadomy za 2gi termin był brany *i t. d.*

Przepis 5. Jeżeli w ciągnięciu ściany sześciogranney zdarzy się: iż trojaki czworogran terminu i wżego ściennego większy będzie nad liczbę przez niego dzielić się mającą, natenczas za wieloraz czyli za nowy termin ścienny pisze się 0, a do liczby podzielney następująca przyłącza się przedziałka, która, dwie ostatnie figury odciągwszy, dzieli się przez trojaki czworogran wszystkich wiadomych ściennych figur za iwszy termin wziętych, a wieloraz pisze się za nowy termin ścienny. Obaczmy użycie tych przepisów w przykładach.

Sześciogran I. Sciana.

(12, 167.) 23.

- A. 8

B. 41, 67.
C. 12

D. 36.
E. 5 4.
F. 27.

G. 41 67.

Przy A jest sześciogran z tabliczki wzięty. Przy B 1wsza liczba 4 jest reszta po odciągnięciu 8 od 12, inne liczby są z przedziałki 2gię, z których 2 ostatnie kręską są odłączone.

Przy C jest troisty czworogran 1wszego terminu ściennego czyli liczby 2, przez który reszta 1wszey przedziałki i pierwsza figura 2gię przedziałki, czyli liczba 41 podzielona za wieloraz daje 2gi termin ścienny 3.

Przy D jest troisty czworogran terminu 1wszego ściennego rozmnożony przez 2gi, i tak napisany, że ostatnia jego figura 6 pada pod 1wszą figurę przedziałki 2gię to jest pod 1.

Przy E jest czworogran terminu 2go rozmnożony przez troisty termin 1wszy to jest: 54 i tak napisany: że ostatnia jego figura 4 jest pod przedostatnią figurą przedziałki 2gię.

Przy

Przy F jest sześciogran terminu 2go ściennego,
przy G summa tych produktów równa reście B,
ściana więc $\equiv 23$

Sześciogran II.		Sciana
(30,371,328)		312.
A.	27	
B.	3,371	
C.	27	
D.	27	
E.	9	
F.	1	
G.	2791	
H.	5803,28	
I.	2883	
L.	5766	
M.	372	
N.	8	
O.	580328.	

W tym przykładzie i w sze dwa terminy ściennego 31 tak są ciągnięte jak ściana dwukrotna w przykładzie 1 w szym, i od A aż do H nie masz nic tylko części pojedynczych z terminów ściennych wyrażonych przez $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, po których odciągnięciu do pozostałej reszty 580 przyłącza się 3cia przedziałka 28, gdzie ostatnie dwie figury kręską się odcinają.

Przy I

Przy I jest troisty czworogran 1wszych 2ch terminów ściennych za ieden wziętych, przez który reszta 2gię przedziałki i 1wsza figura 3cię czyli liczba 5803 dzieli się, a wieloraz 2 za 3ci się termin ścienny piśze.

Przy L jest troisty czworogran terminu 1wszego ściennego (dwa tu już biorąc za ieden) rozmnożony przez termin 2gi to jest przez figurę ścienną 3cią, którego ostatnia figura przypada pod 1wszą podziałki 3cię.

Przy M jest czworogran terminu 2go czyli figury ściennę 3cię rozmnożony przez troisty termin 1wszy ze dwóch złożony, którego ostatnią figura jest pod przedostatnią przedziałki 3cię.

Przy N jest sześciogran 2go terminu czyli figury 3cię ściennę, którego ostatnia figura kładzie się pod ostatnią figurą téż prze-
działki.

Przy O jest summa tych produktów, po który odciągnięciu od reszty przedziałki 2gię i od całej trzecię przy H położonę, gdy nic nie zostaje, znak jest: iż wyciągniona z danego sześciogranu ściana jest
= 312.

Sześćcio.

Sześciogran III. *Scianna.*

	(27,270,901)	301.
A.	27	
	<hr/>	
B.	2,70	
C.	27.	
	<hr/>	
D.	2709,01.	
E.	2700	
	<hr/>	
F.	2700	
G.	90	
H.	I	
	<hr/>	
I.	270901	

W tym przykładzie daje się widzieć potrzeba zachowania Przepisu 5tego. Albowiem po odciągnięciu bez reszty sześciogranu 1wszego terminu ściennego od przedziałki 1wszey, złożony przy B przedziałkę 2gą, i 1wszą ięć figurę kręską odłączony, widzę: że liczby 2 przez troisty czworogran terminu 1wszego przy C położony dzielić nie można dlatego: że ten dzielnik większy jest nad liczbę podzielną; więc napisawszy za 2gi termin ścienny 0, do 2gięj przedziałki przyłączam 3cią przy D i kręską odciawszy dwie ostatnie figury, 1wsze dzielię przez troisty czworogran dwóch ścian wynalezionę terminów to jest przez 2700, a wieloraz 1. piszę za 3ci termin ścienny, toż troisty

troisty czworogran iwszych dwóch terminów
30 za jeden wziętych rozmnożony przez ter-
min 2gi to jest przez 1 z czworogranem 2go
terminu rozmnożonym przez troisty termin
iwszy, tudzież z sześciogranem terminu 2go
w iedną sumę zebrawszy przy I, odciągamy
od obydwóch przedziałek przy D położonych,
po którym odciągnięciu gdy nic nie zostaje,
ściana danego sześciogranu = 301.

Sześciogran IV. Sciana.
(1,8 69,959,168) 1232.

I

8,69
3
—
6
12
8
—

728
A. 1419,59
432
—
1296
324
27
—

B. 132867
C. 90921,68
D. 45387
—
E. 90774
F. 1476
G. 8
—
H. 9092168.

W tym przykładzie wyciągnawszy 3 terminy sposobem dopiero pokazanym i liczby przy B położone od położonych przy A odciągnawszy, do reszty przy C napisanej przydana jest przedziałka 4ta, gdzie liczby 1wsze kręską oddzielone przez troisty czworogran terminu 1wszego ściennego (wszystkie trzy razem biorąc za jeden) położony przy D dzieląc, wieloraz 2 pisze się za 4ty termin ścienny, toż troisty czworogran 1wszego terminu ściennego czyli wszystkich trzech 1wszych rozmnożony przez ostatni termin 2 przy E, a czworogran terminu ostatniego 2 rozmnożony przez trójkę wszystkich trzech 1wszych przy F, tudzież sześciogran tegoż terminu 2 przy G napisawszy, w jedną się zbierają suminę przy H, która odciągniona od reszty 3ciej i całej 4tej przedziałki żadney nie zostawuje reszty, a zatem ściana = 1232.

II. Jest i drugi sposób wyciągania ściany sześciogranney krótszy i łatwiejszy, iako się zdaje, którego pospolicie Rachmistrze używają, ale ten zasada się na 1wszym iako jaśniejszym i gruntowniejszym. Jest zaś taki, *naprzód*: wynalazłszy 1wży termin ścienny tymże samym sposobem, który jest podany w przepisie I, i sześciogran iego od 1wżey przedziałki odciągnawszy, do reszty składa się 1wszy tylko termin 2giej przedziałki; *potóm*: reszta, jeżeli iaka została, i złożona 1wsza figura przedziałki 2giej dzieli się przez troisty

CZWO-

czworogran terminu iwszego ściennego znalezione, a wieloraz za 2gi się termin ścienny pisze, toż z obydwóch terminów ściennych zrobiwszy sześciogran, od obydwóch razem wziętych przedziałek danego sześciogranu odciąga się, i reszta się notuje; *potrzebie*: do téy reszty, jeżeli jest iaka, składa się znowu następujący przedziałki iwsz figura, i dzieli się przez troisty czworogran obydwóch terminów razem wziętych ściany znalezione, wieloraz da 3ci termin ścienny, z których wszystkich trzech zrobiony sześciogran i od wszystkich ich przedziałek odciągniony kończy działanie, jeżeli 3 tylko były przedziałki; *poczwarcie*: jeżeliby zaś więcej ich, niż 3 było w danym sześciogranie, wtenczas po 3ciem odciągnięciu sześciogranu 3 terminów ściennych, do reszty pozostałej znowu się składa następujący przedziałki iwsza figura, i znowu dzieli się przez troisty czworogran wszystkich znalezionych terminów i r. d. Niech będzie

Sześciogran dany.

Ściana.

(12, 167)

23

A.

8

B.

41

C.

12

D.

12 167.

Przy A jest sześciogran z tabliczki wzięty, którego ściana 2 jest iwszym terminem ściennym.

Przy

Przy B jest reszta po odciągnięciu tegoż sześciogranu od 1wszég przedziałki, i przyłączone do niéy 1wsza figura przedziałki 2giéy.

Przy C jest troisty czworogran 1wszego terminu, przez który podzielona liczba leżąca przy B daje 2gi termin ścienny to jest 3. Nakoniec przy D jest sześciogran z obydwóch terminów ściennych zrobiony, który że jest równy danemu, nic po jego odciągnięciu nie zostaje, azatém ściana wyciągniona = 23.

Sześciogran dany. *Ściana.*
(11,390,625) 225.

8

A.	33
B.	12

C.	11390
D.	10648

E.	7426
F.	1452

G.	11390625.
----	-----------

Przy A jest reszta 1wszég, i 1wsza figura 2giég przedziałki.

Przy B jest troisty czworogran terminu 1wszego ściennego, przez który liczba przy A podzielona daje termin 2gi ścienny. Przy C

szą dwie i w sze przedziałki danego sześciogranu, od których sześciogran z i w sz ych dwóch terminów ściennych to jest ze 22 zrobiony i przy D położony odciągnąwszy, reszta 742 przy E kładzie się a do nię y przyłączą się 6 i w sza figura przedziałki 3cię y. Ta zaś liczba cała przez trojaki czworogran i w sz ych 2 terminów ściennych położony przy F podzielona daje 3ci termin ścienny, z których w sz ych 3 razem wziętych zrobiwszy sześciogran położony przy G, i odciągnąwszy od danego; nic nie zostaje, azatém ściana \equiv 225.

Przeestroga. Drugi ten sposób wyciągania ściany sześciogranney, acz zda się być od i w sz ych nieco łatwieyszy, w rzeczy samę y jest zamatwany i bez wiadomości i go nie może jaśnie być okazany, dotego równie albo i bardziej zatrudniający robieniem pokilkkokrotnie sześciogranów, przeto tamtego raczē y trzymać się radzę, którego niezawodność zaraz się okaże.

Okazanie dunych Przepisów.

Przepisy te zafadzają się na wewnętrznym sześciogranów składzie, który formuła ogólna: $a \times 3a^2b \times 3ab^2 \times b^2$ wyraża, iako jest oczywista. Wyciągać albowiem i w sz ym zwłaszcza sposobem ścianę sześciogranną nie innego nie jest, tylko odkrywać (sposobem dzielenia wyciąganiu ścian czworogrannych podobnym) ka-
żdą

żdą zosobna część dany sześciogran składającą,
i z niéy każdego zosobna terminu dochodzić
ściennego. Co we wszystkich danych przy-
kładach na oko się pokazało. Ale weźmy ielżce
ieden sześciogran i przytłosuymy wyciąganie
z niego ściany do wewnętrznego jego składu
w § XII. odkrytego.

Skład Sześciogranu. Wyciąg: ściany. Sciana.

11,390,625. (11,390,625) 225.

I. $a^3 = 8\,000\,000$. A. 8

B. 33,90

C. 12

* $3a^2b = 24\,000\,000$. D. 24

* $3ab^2 = 24\,000\,000$. E. 24

* $b^3 = 8\,000$. F. 8

G. 2648

H. 7426,25

I. 1352

II. $3a^2b = 726\,000$.

* $3ab^2 = 16\,500$. K. 7260

* $b^3 = 125$. L. 1650

M. 125

Sum: = 11,390,625 N. 742625

I. Wyciągając ścianę z danego sześciogranu, brałem i włąz przedziałkę i przychylający

jący się do liczby 11 sześciogran 8 znalazłszy w tabliczce, ścianę jego 2. za 1wszy termin ścienny położyłem. Lecz coż to jest ten sześciogran, jeżeli nie 1wsza część danego sześciogranu przez 2^3 wyrażona?

II. Odcinając 8 od 1wszój przedziałki, do reszty przy B. położonój przydałem 2gą przedziałkę 390, w którój że się mieszczą części przez $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ wyrażone, podzieliłem liczbę w niój krótką odciętą przez $3a^2$ czyli przez troisty czworogran terminu 1go ściany znalezionej, który jest przy C, i znalazłem 2gi termin ścienny 2; potem tenże troisty czworogran terminu 1wzłego rozmnożony przez termin 2gi to jest: 24 tak napisałem pod resztą 1wszój przedziałki i pod 2gą przedziałką przy D, żeby ostatnia jego figura 4 przypadła pod 1wszą figurę przedziałki 2giój, a pod 2gą ostatnią figurą czworogranu terminu 2go ściennego rozmnożonego przez troisty termin 1wszy, pod 3cią zaś sześciogran tegoż 2go terminu, lecz czyż części dany sześciogran składające wyrażone przez $+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ nie też same są i nie tak przypadają? wszak i tam 4 pod 3, drugie 4 pod 9, 8 pod 0 tak, jako przy D, E i F.

III. Części te w jedną sumę zebrane przy G i od liczby B odcinione zostawiają resztę H, do którój 3cią przyłączyłem przedziałkę, a wiedząc: że w tój reszcie i przyłączonej przedziałce mieszczą się drugie części danego

F : : : : : sześciog-

sześciogranu przez II. $3a^2b \star 3ab^2 \star b^3$ wyrażone, wziąłem dwa i wśze terminy ściennie już znalezione za ieden to jest 22, i zrobiwszy z nich $3a^2$ to jest troisty czworogran, podzieliłem przez niego liczby H kręską odcięte i znalazłem 3ci termin ścienny $= 5$. Mając zaś wszystkie 3 terminy ściennie uważałem: czy troisty czworogran dwóch za ieden wziętych terminów ściennych rozmnożony przez termin 3ci wzięty za 2gi, i tego znowu czworogran rozmnożony przez trójkę tamtych, nareście sześciogran terminu ostatniego, czy, mówię, w rescie 2gię i całej 3cię przedziałce mieszczą się, przeto te 3 produkta tak napisałem: że i wśzego ostatnia figura pod i wśzą przedziałki 3cię padła, 2go pod 2gą, 3go pod 3cią; aże i wkładzie danego sześciograna części 2gie przez $3a^2b \star 3ab^2 \star b^3$ wyrażone także są i tak rozłożone, iż zupełnie tym trzem produktom odpowiadają, iako każdy widzi; więc wyciąganie ściany sześciogrannéy zasada się na wewnętrznym składzie danych sześciogranów, a zatem zawodne byź wcale nie może.

C. B. D. O.

Prześtroga. Gdyby z danego sześciogranu po odcygnięciu ostatniém reszta iaka została, znakbyto był: iż dana liczba sześciogranna nie jest doskonałym sześciogranem, a zatem ściana jego ciągnąć się może przez przybliżenie (*per approximationem*) tym samym sposobem, który w Prześtrodze I. pod § XI. opisany z tą różnicą: że tam parami, a tu tróy-

trójkami cyfry do frakcyi przydają się, i tam przepisy dane na wyciąganie ściany czworogrannéy, a tu dane na wyciąganie ściany sześciogrannéy zachowują się. Przykład następujący może być wzorem takiego ścian wyciągania:

Sześciog: niedoskonały. Sciana przybliżająca się.

(9,471)

$21 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000}$

B

1 471

1 2

1 2

6

1

1 2 6 1

A. 2100,00

B. 1,000

C. 1323

D. 1323

63

1

1 3 2 9 3 1

E. 77069000

F. 1000000

F₂

W tym

W tym przykładzie po wyciągnięciu dwóch terminów ściennych 21 pozostała reszta A obrócona na frakcyą i trzy tak do licznika A, iako do mianownika B cyfry przydane. Przy C trojaki czworogran terminu i wszego (obydwa wyciągnięte za jeden biorąc) jest dzielnikiem licznika A, po którego podzieleniu wieloraz 1 pisze się za licznika frakcyi nowy termin ścienny wyrażający, a za mianownika pisze się ściana z mianownika B wyciągnięta $= 10$. Po niżey D kładą się trzy produkta z 3 terminów ściennych 211, przyłączając licznika frakcyi $\frac{1}{10}$ do terminów całkowitych, a summa ich od liczby A odciąga się. Reszta E znowu na frakcyą się obraca inne trzy cyfry tak do licznika E, iako do przeszłego mianownika B przy F położonego przydawszy; a tak znowu z mianownika F wyciągnięta ściana $= 100$ za nowę frakcyi mianownika kładzie się, a licznik ię 5 z liczby E wyciąga się podług przepisów danych i t. d.

§ XIV. Z daney liczby iakiegokolwiek byteż
nawwyższego stopnia wyciągnąć ściane.

Poprzedzając o wyciąganiu ścian czworogrannych mającemu wiadomości bez trudności przydzie wyciąganie ścian wyższostopniowych. Trzeba l. w danym iakimkolwiek stopniu porobić przedziałki tyle figur zawierające, ile wykładnik danego stopnia ma w sobie jedności, to jest: ieżeli wykładnik jest 4 lub 5, prze-

przedziałki mieć powinny figur 4 lub 5 i t. a.
 II. Z tabliczki pod § X. położonéy wziąć ścia-
 nę stopnia w iwszém przedziałce zawartego,
 albo iemu naybliższego, i tę ścianę za iwszy
 termin ścienny położyć, a ięć stopień z tabli-
 czki wzięty od przedziałki iwszy odciągnać.
 III. Pierwszy termin ścienny wynaleziony wy-
 nieść do stopnia jednością mniejszego od sto-
 pnia danego np: do 4tego stopnia, gdy ścia-
 na ma być pięciostopniowa, i nowy ten sto-
 pień rozmnożyć przez wykładnika ściany np:
 przez 5; jeżeli ściana jest 5ta, produkt ten bę-
 dzie dzielnikiem reszty przedziałki iwszy,
 jeżeli iaka została, i iwszy figury kręską od-
 ciętę przedziałki zgię. IV. Wziąć formułę
 tegoż stopnia, którego się wyciąga ściana,
 zrobioną z ściany dwukrotnéy a+b np: jeżeli
 ściana wyciąga się pięciostopniowa, wynieść
 trzeba a+b do 5go stopnia, będzie: a⁵+ 5a⁴b
 + 10a³b² + 10a²b³ + 5ab⁴ + b⁵. Potém za i-
 wszy termin ścienny znaleziony założyć a,
 za wieloraz zaś, który ma być zgim terminem
 ściennym, założyć b, azatém do którego sto-
 pnia wyniesione jest a lub b w każdym ter-
 minie rzeczonéy formuły, do tego wynosić i
 iwszy termin ścienny i wieloraz z podzielenia
 reszty iwszy wypadły; toż obydwie te stopnie
 przez nich samych mnożyć tak; iak w formule a
 i b są rozmnożone, np: jeżeli w formule jest 5a⁴b,
 więc iwszy termin ścienny wyniosłszy do 4te-
 go stopnia, rozmnożyć trzeba i przez wielo-
 raz

raz i przez współczynnika $5 i t. d.$ V. Podług
 téy więc formuły i każdego z osobna terminu
 jéy szukać produktów 1wszych dwóch termi-
 nów ściennych, a wynalezione tak iedne pod
 drugiemu podpisywać, iako się piszą, wyciąga-
 jąc ścianę sześciogranną to iest: żeby przedosta-
 tnia figura produktu 2go była pod ostatnią fi-
 gurą produktu 1wszego i tak zawsze, żeby
 dzieśiątki produktów niższych były pod jedno-
 ściami wyższych, które to produkta w iedną
 sumę zebrane odciągnąć od reszty przedziałki
 1wszég i 2giég całég. Gdyby zaś summa ową
 odciążna od liczby, od którég ma być odcią-
 gniona, była więkfsza, znakby pewny był: że
 wieloraz za 2gi ścienny termin wypadły wię-
 kfszy był wzięty, niż należało, azatém trzeba
 go iednością póty zmniejszać, póki nanowo
 robione podług formuły produkta i razem do-
 dane nie uczynią mniejszég summy nad liczbę
 do odciążnienia daną, albo iég równég.
 VI. Do reszty z 2giég przedziałki pozostałég
 przyłączysz przedziałkę 3cią i 1wszą iég
 z lewég ręki figurę odciążysz, dzielić, iak
 przedtém, przez stopień ściany wyciągnionég
 (biorąc obydwá jég terminy wyciągnione za
 ieden) mniejszy iednością od wykładnika stop-
 nia danego, a przez tego samego wykładni-
 ka rozmnożony, formuły używając, iak pier-
 wég. VII. Jeżeli dzielnik w podzielnéy liczb-
 ie ani razu nie mieści się, za wieloraz albo
 nowy termin ścienny pisze się 0, a do prze-
 działki

działki podzielnéy następująca się spuszcza, do dzielnika zaś tyle się cyfer przydaje, ilu stopniów wyciąga się ściana zmniejszona jednością, np: jeżeli ściana jest 5, do dzielnika przydaje się cyfer 4. Niech będzie przykładem takiego wyciągania.

Liczba Pięciostopniowa. Sciana.

$$\sqrt[5]{(65,06608,08696,90625)} \quad 2305.$$

B. $a^5 = 32$

C. $330,6608,$

D. $5a^4 = 80$

E. $5a^4b = 240$

$10a^3b^2 = 720$

$10a^2b^3 = 1080$

$5ab^4 = 810$

$b^5 = 243$

F. 3236343

H. $70265086969,0625$

I. $5a^4 = 13992050000$

K. $5a^4b = 69960250000$

$10a^3b^2 = 3041750000$

$10a^2b^3 = 66125000$

$5ab^4 = 718750$

$b^5 = 3125$

L. $702650869690625.$

Przy

Przy Literze B jest 5ty stopień z tabliczki wzięty, którego ściana z przez Przepis II. jest 1wszym terminem ściany ogólnej. Przy C jest reszta po odciągnięciu tegoż 5tego stopnia od 1wszey przedziałki z przyłączoną 2gą całą. Przy D jest 1wszy termin ścienny do stopnia jednością mniejszego od danego wyniesiony i rozmnożony przez wykładnik ściany to jest przez 5, a przez ten produkt podzielona wzmiankowana reszta 1wszey i 1wsza figura 2gię przedziałki daje wieloraz za 2gi termin ścienny $= 3$. Przy E są produkty w Przep: V. opisane wypadłe z pierwszych dwóch terminów ściennych podług formuły tak jedne pod drugimi podpisane, że produktów niższych dziesiątki padły pod jednościami produktów wyższych *i t. d.* Przy F jest suma tychże produktów, która odciągnięta od C zostawiła resztę położoną przy H, do której nie tylko 3cia, ale i 4ta przyłączona przedziałka z przyczyny, o której się zaraz powie. Przy I są pierwsze 2 terminy ścienne za jeden wzięte wyniesione do stopnia mniejszego jednością od danego stopnia i rozmnożone przez danego wykładnika, a te są dzielnikiem liczby H przez Przep: VI. Ale że ten dzielnik ani razu w liczbie podzielnéy nie mieści się, przeto za wieloraz czyli za 3ci termin ścienny napisana jest o przez Przep: VII. a do rzeczzonego dzielnika przydane są 4 cyfry, przeto też do liczby podzielnéy przedziałka ostatnia przyłączona.

Przy K.

Przy K są produkta podobne położonym przy E tak wyszukane i napisane jak tamte, z tą jednak różnicą: że tu 3 i 4te terminy ścienniebrane są za jeden, a 4ty za 2gi. Przy L jest summa tych produktów, po który odciągnięciu od liczby H nie zostaje, azatém ściana wyciągnięta $= 2305$.

Przeſtoga. Gdyby dany w liczbach 4ty lub 5ty stopień był niedoskonały ściana jego mogłaby się ciągnąć przez przybliżanie czyli przez terminy niekończone za pomocą formuły, obróciwszy resztę po ostatniém odciągnięciu pozostałą na frakcyą i przydawszy cyfer tyle, ile wykładnik danego stopnia ma w sobie jedności *i t. d.*

ROZDZIAŁ IV.

O Pomiarach składanych w ogólności.

§ XV. Wykład potrzebniejszych wyrazów.

I. **P**omiary składanemi nazywają się te, w których niewiadome ilkości są czworogrannne, sześciogrannne, to jest: do 2go, 3go albo do wyższego ieszcze stopnia wyniesione; i tak pomiar: $x^2 = ab$ jest czworogranny, bo ilkość w nim niewiadoma x^2 wyniesiona jest do 2go stopnia; pomiar zaś $x^3 = a$ jest sześciogranny, bo ilkość x^3 jest trzeciostopniowa *i t. d.*

II. Składane pomiary bywają i wtenczas, kiedy ilkości niewiadome do nieokreślonego stopnia

stopnia wyrażonego literą m lub n są wyniesione, tak pomiar : $x^n = ab$ jest składany lecz nieokreślony, który się określi, gdy się wykładownikowi szczególna iaka cena naznaczy. Będzie zatem x^n albo czworogranem, jeśli będzie $n=2$, albo sześciogranem, jeśli $n=3$. *i t.d.*

III. Pomiar składany dwojaki być może to jest albo czysty czyli sam przez się, *aquatio pura*, albo przymieszkowy, *affecta*. Czysty jest, kiedy w nim albo jedna tylko ilkość niewiadoma wyższostopniowa jest albo kilka, ale wszystkie do jednegoż stopnia są wyniesione; takie są pomiary I. $x^3 = bd$. II. $x^2 = p^2 = bd$. Przymieszkowy zaś jest, kiedy do jednego stopnia ilkości niewiadomej przyłączone są inne stopnie téżże ilkości, np: $x^2 + ax = ab$, gdzie x w 1wszym terminie jest drugostopniowe, a w 2gim pierwszostopniowe *i t. d.*

IV. Ściana pomiaru składanego jest cena ilkości niewiadomej zredukowaney do 1go stopnia np: ściana pomiaru : $x^2 = a$ będzie cena ilkości x^2 , gdy z nięj tudzież z a wyciągniona będzie ściana czworogranna, to jest będzie: $x = \sqrt{a}$. Tyle bowiem ważyć będzie \sqrt{a} , ile x . Ta zaś może być dodatna, albo odciążna. Dodatna bywa, kiedy wyraźny lub domniemany znak $+$ ma przed sobą, i nazywa się ścianą rzetelną, *radix vera*, odciążna zaś, kiedy wyraźnie położony przed sobą ma znak $-$, i nazywa się ścianą nierzetelną czyli fałszywą; *radix falsa*; obydwie atoli przerzeczone ściany

szę rzeczywiście. Bo gdy np: winenem komu Cz: 50, a nie mam ich zkąd oddać, mogę mówić: iż mam — 50 czyli długi rzeczywiście. Obie iednak te ściany z pomiaru czworogramnego wyciągnąć się mogą, o czém obłężnięć potém.

V. Kiedy cena niewiadomę ilkości jest czworogramem odciążnym np: $x = \sqrt{-a^2}$, natenczas cena ta czyli ściana, o której wyciągnięcie z takiego czworogramu idzie, nazywa się ścianą imiginaryyną czyli niepodobną, *radix imaginaria, impossibilis*, gdyż czworogram $-a^2$ wypaść nie może ani z $a \times a$, ani z $-a \times -a$, iako przez się oczywista i z przepisów na mnożenie ilkości w Części I. Rozdz: I. danych każdemu wiadoma; azatém wyciągnąć z niego ścianę czworogramną, rzecz bardzięć niepodobna, niż cyrkuł zamienić w czworogram. Pamięć na ten punkt potrzebna będzie w Rezolwowaniu Zagadnień zgo stożnia, gdzie iednak szczególną na to uwaga dana będzie; tymczasem ogólne sposoby redukowania pomiarów składanych któtko się przełożą.

§ XVI. Jakim porządkiem układać terminy pomiaru składanego?

I. Terminy ilkość niewiadomą bądź samotną, bądź rozmnożoną przez inną wiadomą w sobie zamykające trzeba w iednemy pomiaru części mieścić tak, żeby na iwszemy mieyscu

mieyscu była ta, która do wyższego nad inne
 iest stopnia wyniesiona, i ta się nazywa rwszym
 pomiaru terminem, na drugiem zaś mieyscu
 niewiadoma iednym stopniem od rwszey niż-
 sza, a ta będzie zgim terminem *i t d.* W zgięy
 zaś pomiaru części kładą się terminy z samych
 wiadomych ilkości złożone, które, gdyby by-
 ły z wykładnikami, tym samym porządkiem,
 co w pierwszey części układać się powinny.
 Niech będzie pomiar dany: $3b^2x + 3bx^2 - d$
 $= f - x^3$, porządnie ułożony będzie: $x^3 +$
 $3bx^2 + 3b^2x = d + f$.

II. Jeżeli termin najwyższego stopnia iest
 odciażny to iest ze znakiem —, powinien się
 obrócić na dodatny, przenosząc go do innéy te-
 goż pomiaru części, inaczey ściana zwłaszcza
 czworogranna byłaby niepodobna przez Wy-
 kład V, np: $ax - x^2 = ab - f$, przenosząc
 $-x^2$ owszem i ax do zgięy części, a termi-
 ny części zgięy do rwszey, będzie: $f - ab$
 $= x^2 - ax$. Czasem wszystkie terminy oby-
 dwóch części pomiaru w iednéy się kładą i ró-
 wnają z 0, co się niżej często czynić będzie
 dla łatwiejszey redukcyi pomiarów, tak np:
 pomiar poprzedzający pisać się może: $a^2 - ax$
 $= f + ab = 0$.

III. Wszystkie terminy, w których nie-
 wiadoma ilkość w iednymże stopniu iest, ieden
 pod zgim tak właśnie, iak w dodawaniu pisać się
 zwykły, co się i z wiadomemi czyni, kiedy ich
 kilka będzie, np: $x^3 + ax^2 - bx^2 + cx - bx =$
 ab .

ab. Pisząc terminy jednostopniowe jeden pod drugim będzie:

$$\begin{array}{r} x^3 + ax^2 - bx \\ -bx^2 + cx \\ \hline = ab. \end{array}$$

A takie ilkości i tak napisane za jedenże termin brać się zwykły.

IV. Kiedy w składanym pomierze brakuje terminu takiego, brak ten wyraża się gwiazdeczką, np: w pomierze: $x^4 + \dots - cx^2 + \dots + a^2b = 0$, gdzie brakuje 2go i 4tego terminu, przez ten atoli brak nie psuje się bynajmnięj porządek terminów, gdyż $-cx^2$ trzyma 3cie swoje miejsce i $+a^2b$ swoje 5te, choć śródkujących nie dostaje; owszem ani równości między częściami pomiaru taki brak nie szkodzi, gdyż mimo wyciąganie ścian są sposoby, przez które zredukować się taki pomiar może i zagadnienie rozwiązać, o czém niżej.

§ XVII. Jakie są powszechniejsze sposoby redukowania pomiarów składanych.

I. Gdy współczynnik terminu 1go w pomierze porządknie ułożonym zamyka się raz lub kilka razy specna w współczynnikach innych terminów, natenczas wszystkie współczynniki liczbami lub literami wyrażone podzieliwszy przez współczynnika 1go terminu, składany pomiar zamieni się w prostszy, np: $3x^2 + 6ax = ab$, podzieliwszy przez 3 współczynnika innych terminów, będzie: $x^2 + 2ax = \frac{1}{3}ab$.

Tak-

Także: $ax^2 - 2ax = abc$ przez a podzieliwszy cały pomiar, wypadnie: $x^2 - 2x = bc$. Podobnie: $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192 = 4ab$, podzieliwszy przez 4 , wyjdzie: $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = ab$ *it. d.*

II. Trafiają się pomiary składane z wykładnikami wyżzstopniowemi trzy tylko częstokroć terminy mające, z których 1wszy do 4tego lub 6tego, a czasem i wyższego jeszcze stopnia wyniesiony bywa; którego wykładnik z wykładnikami innych terminów bywa w proporcji Arytmetyczney, iak $4:2$, albo $6:3$. Weyrzawszy na takie pomiary, zdadzą się być 4to-stopniowemi, lub sześciostopniowemi, w rzeczy saméy nie są tylko czworogrannemi, nazywają się zaś pomiarami naciąganemi 2go stopnia, *aquationes derivata 2di gradus*, i bardzo łatwo zamieniają się w czworogrannę, założywszy w czwartostopniowym rzeczonym pomierze z za x^2 , a w sześciostopniowym toż z za x^3 . I tak w pomierze: $x^4 - 8x^2 - 4 = 0$, założywszy z za x^2 , będzie pomiar czworogranny: $z^2 - 8z - 4 = 0$; w pomierze zaś: $x^6 - 2ax^3 + 8b^3 = 0$ założywszy z za x^3 , wypadnie także czworogranny pomiar: $z^2 - 2az + 8b^3 = 0$; których redukcya dalsza uczyni się przez następujący §. Obacz Rezolucyą Zagadnienia 5tego między przykładami pomiarów sześciogrannych.

III. Trafiają się także pomiary składane z znakiem ściennym wyraźnego lub domniemanego

manego wykładnika ściany swoiëy w sobie zawierajacym. Znak ten ieśli w iednëy tylko części pomiaru nayduje się, łatwo się zgubi, mażąc go w téy części, w którëy ieść, a zgą część wynosząc do stopnia wyrażonego przez tenże

znak zmazany. Tak np: pomiar ten $\sqrt{a \mp x} = 2b$, mażąc $\sqrt{}$, i $2b$ wynosząc do $2go$ stopnia, obróci się w prostszy i będzie: $a \mp x = 4b^2$.

Tak i $\sqrt[3]{a \mp x} = 2b$ będzie: $a \mp x = 8b^3$. i t. d. Znak bowiem ścienny pokazuje: że z ilkości pod nim położonëy ma się wyciągnąć ściana przez wykładnika iëgo wyrażona, więc ilkość ta w rzeczy samëy powinna być wyższostopniowa to ieść: czworogranna lub sześciogranna; więc zostawiwszy ją bez znaku, nie przestanie być tymże samym stopniem, azatém wyniósłszy zgą ilkość iëy równą do iednegoż z nią stopnia, równość się między niemi nie psuje, atymczasem składany pomiar obróci się w prostszy.

IV. Kiedy z warunków zagadnienia iakiego wypadnie kilka pomiarów składanych, zredukować ie można do iednego przez założenie ceny ilkości niewiadomëy w iednym pomierze wziętëy za tęż samą ilkość położoną w zgim, lub przez składanie w ieden pomiar cen obydwóch. W czëm żadnëy trudności dla tych nie maż, którzy mają w pamięci to, co się o redukcyi podobnych pomiarów prostych przełożyło w Części Iwizëy na karcie 121 i następu-

stępujących. Obacz Zagadnienia 2. i 4. niżej między przykładami pomiarów sześciogran-
nych.

V. Wszelki pomiar składany, który tylko można zredukować czyli na prostszy obrócić, albo jest podzielny bez reszty przez inny taki, który dzielnikiem albo miarą jego nazwać się może, albo nie jest tak podzielny. Jeśli nie jest, trzeba przystąpić do szczególnych sposobów redukowania go, które w następujących Rozdziałach będą wyśłużzone. Zastanowić się jednak wprzód i rozstrząsnąć dobrze należy: czy nie jest tak, jak się rzekło, podzielny, uważając najbardziej wykładnika ściany, który wyraża: z ilu pomiarów prostych, przez siebie rozmnożonych, tenże składany pomiar wypaść, przez które mógł być podzielony. Tak np: pomiar 3ciostopniowy, którego wykładnik 3, nie może wypaść tylko z rozmnożenia albo 3 pomiarów prostych przez siebie samych, albo dwóch jednego prostego, 2go czworokątne-
go, zatem przez te tylko może być podziel-
ny, bo i wykładnik jego 3 nie może się dzielić tylko na 1, 1, 1, albo na 1 i 2; toż samo o 4 rozumieć i o 4tym stopniu; którego wykładnik 4 jest podzielny I. na 1, 1, 1, 1, II. na 1, 1, 2, III. na 1, 3, IV. na 2, 2, i t. d. Szukając już dzielnika, od najprostszego zaczynać naturalny porządek każe, to jest: szukać najprzód pomiaru pięciostopniowego, przez któryby podzielony mógł być bez reszty wyżziostopniowy
dany

dany, a znalazłszy taki i podział rzeczony uczyniwszy, szukać innego także pierwszostopniowego, przez któryby sam wieloraz z pierwszego podziału wypadły mógł być podobnie podzielony *i t. d.* aż za wieloraz wypadnie pomiar wcale prosty. Jeżeli zaś dany pomiar wyższostopniowy albo wieloraz z podziału pierwszego wypadły nie może się podzielić przez żaden pomiar prosty, natenczas uważać potrzeba: czy tenże pomiar lub wieloraz nie podzieli się przez pomiar iaki drugostopniowy, lub jeśli dany jeszcze wyższy jest, przez trzeciosstopniowy *i t. d.* nie siągając jednak póty wyższych, póki podział przez niższe nie będzie sprobowany. Wynalezienie takich dzielników co do pomiarów czworogrannych i sześciogrannych bardzo łatwe. Niech będzie np: pomiar: $x^3 - 9x^2 + 22x - 8 = 0$, szukam wszystkich dzielników ostatniego terminu — 8, będą: 1, 2, 4, 8; robię z nich pomiary proste I. $x - 1 = 0$, II. $x - 2 = 0$, III. $x - 4 = 0$, IV. $x - 8 = 0$. Dzielę dany pomiar przez pierwszy, ale z tego podziału zostaje reszta, dzielę przez 2gi, ale i ten podział nie jest bez reszty; więc podzieliwszy przez 3ci, wypadnie za wieloraz pomiar od danego niższy to jest: $x^2 - 5x + 2 = 0$ *i t. d.* Lecz co się tyczy dzielników wyższostopniowych, tych wynalezienie nieco trudniejszy, o którym namieni się cokolwiek w Rozdziale ostatnim téj Części. Dokładniejszy tego wyśuszczenie jest u X. Reynau. (*)

G ROZ-

(*) Analyse démontrée tom: 1. livr: IV. pag: 133.

R O Z D Z I A Ł V.

O Pomiarach czworogrannych.

NAmieniono się w § XV. p. II. że pomiary składane mogą być tak, iako i proste albo określone, albo nieokreślone. O pomiarach składanych nieokreślonych nie masz tu co mówić, chyba to iedno: że ilkość nieokreślona w redukcjach rzeczonych pomiarów tak powinna być uważana, iak gdyby była określona, a po ostatniéy pomiaru redukcyi ma się określić czyli na liczbę zgodną z warunkami zagadnienia obrócić, iako się ostrzegło w Rozdziale IV. Części I.

Około określonych więc pomiarów i zagadnień, zaczawszy od czworogrannych, cała nasza w tym i następujących Rozdziałach będzie zabawa.

§ XVIII. *Przepisy na rezolwowanie Problemów czworogrannych.*

Prócz powszechnych Przepisów danych tak w iwszék Części Rozdziale 2gim na rezolwowanie Problematów prostych, iako i w téy 2giéy w § poprzedzającym, trzeba nadto mieć przed oczyma i zachować następujące:

Przepis 1. Przez wzmiankowane Przepisy tak trzeba zredukować pomiar czworogranny, żeby w iednéy iego części albo czworogran tylko ilkości niewiadoméy przez żadną inną

inną ilość lub liczbę ani rozmnożony ani podzielony został, albo jeżeli zostaną inne jeszcze terminy, żeby zawierały w sobie ilość niewiadomą też samą, która jest w terminie 1wszym, ale prostą czyli do 2go stopnia nie wyniesioną, w 2gię zaś pomiaru części żeby się same wiadome ilości bez przymieszki niewiadomych mieściły. Przeto gdyby z warunków iakiego zagadnienia wypadło kilka pomiarów dla kilku niewiadomych ilości, wżyskie te pomiary zredukować potrzeba do iednego (przez § XVII. p. IV.) w którymby iedna tylko niewiadoma została. Redukcyja zaś dalsza na tém ma stanąć, żeby czworogran ilości niewiadomę z redukcji wypadły i w iednéjże części pomiaru umieszczony był dodatny równie iako i czworogran ilości wiadomę w 2gięj części; gdyż żaden czworogran nie może być odciażny przez p. V. § XV.

Przepis 2. Mając tak zredukowany pomiar, jeżeli w iednéj iego części nic więcéj nie znajduje się prócz czworogranu ilości niewiadomę, czyli jeżeli pomiar jest czysty; śaftwa będzie dalsza iego redukcya. Niczego bowiem nie braknie, tylko ścianę czworogranną wyciągnąć, która z 1wszój naprzód części rzeczywiście wyciąga się przez § V, w 2gięj zaś części, gdzie same są ilości wiadome, wyciąganie ściany tymczasem wyrazi się zwy czaynym znakiem ściennym.

Przepis 3. Kiedy zaś w iednéjże części pomiaru czworogran ilości niewiadomę ma

przyłączone inne terminy zamykające w sobie też samą ale prostą czyli pierwszostopniową ilość, czyli kiedy pomiar jest przymieszkowy (§ XV. Wykř: III) wtenczas pomiar bywa niezupewny mający wprawdzie czworogran 1wszego terminu ściennego i dwóykę tegoż terminu rozmnożoną przez termin 2gi, ale nie mający czworogranu terminu 2go ściany swojej, azatém wtenczas czworogran ilości niewiadomey bierze się za termin 1wszy pomiaru, inne zaś przyłączone terminy zawierające w sobie ilość też samą niewiadomą ale prostą biorą się za 2gi termin, a 3ciego szukać trzeba, np: wpomierze $x^2 - 3ax - ax = 2b - 4a^2$ za 1wszy termin bierze się x^2 , za 2gi zaś $-3ax - ax$, czyli $-4ax$, a 3ciego tu brakuje to jest: czworogranu terminu 2go ściennego. Przeto poszukać go potrzeba, i dopełnić nim takiego pomiaru, żeby można było wyciągnąć z niego ścianę czworogranną. Nim zaś to dopełnienie nastąpi, potrzeba *na-przód*: wyciągnąć ścianę z terminu 1wszego, iaki jest w danym przykładzie x^2 , którego ściana x będzie 1wszym terminem ściany dwukrotnéy, *powtóre*: przez dwóykę tegoż terminu to jest przez $2x$ podzielić 2gi danego czworogranu termin to jest $-4ax$, wieloraz ztąd wypadły $-2a$ będzie 2gim terminem ściennym, którego czworogran $4a^2$, i całą ścianę wyciągnioną $x - 2a$ zanotować.

Przepis 4. Uważać trzeba jeżeli czworogran,

gran, którego brakuje, terminu 2go nie znajduje się w 2giéy pomiaru części z samych wiadomych ilkości złożonév. Jeżeli nie, postąpić należy podług Przepisu 5. niżej położonego. Jeżeli zaś znajduje się, uważać: z iakim tam jest znakiem, odciążnym, czy dodatnym. I. Jeżeli tam jest z znakiem odciążnym, przenieść go ztamtąd potrzeba z przeciwnym znakiem do téy części, która ma w sobie ilkości niewiadome, a tym sposobem pomiar będzie dopełniony, i w 1wszéy części swojej mieć będzie doskonały czworogran, którego ściana dwukrotna przez Przepis 3ci już jest wyciągniona. Albowiem prócz czworogranu terminu 1wszego téy ściany i dwóyki terminu 1wszego rozmnożonév przez termin 2gi będzie nadto w téyże części pomiaru czworogran 2go terminu ściennego. Czego do zupełności pomiaru trzeba było. Tak w przykładzie wyżej danym czyli w pomierze: $x^2 - 4ax = 2b - 4a^2$, którego ściana $= x - 2a$, czworogran 2go téyże ściany terminu $4a^2$ znajduje się z znakiem odciążnym w 2giéy części, ten więc sam przeniesiony z przeciwnym znakiem do 1wszéy dopełni pomiaru i będzie: $x^2 - 4ax + 4a^2 = 2b$. Zawierać bowiem będzie w 1wszéy części swojej czworogran 1wszego terminu ściennego x^2 i dwóykę tegoż terminu rozmnożoną przez 2gi $- 4ax$ z czworogranem 2go terminu $+ 4a^2$, które to części razem wzięte składają zupełny czworogran ściany dwukrotnév przez §

X. Wyciągnąwszy więc tę ścianę z 1wszhey dopełnionego pomiaru części przez § VI, a w 2gięy wyciągnięcie znakiem tynczasem ściennym wyraziwszy, będzie pomiar: $x = 2a = \sqrt{2b}$; przeniósłszy nakoniec — $2a$ do części

2gięy, będzie: $x = \sqrt{2b} + 2a$ pomiar zredukowany do iedney ilkości niewiadomey, iako jest oczywista, z którego 2gięy części obróconey na liczbę wyciągnąwszy także ścianę czworograną przez § XI. Zagadnienie będzie uławnione. II. Jeżeli zaś czworogran 2go terminu ściennego znajduje się w 2gięy pomiaru części z znakiem dodatnym, nie można go żadną miarą przenosić do 1wszhey części, i brać za 3ci termin czworogranu mającego ścianę dwukrotną z przyczyny namienioney w § XV. p. V. gdyż taki czworogran jest fałszywy i niepodobny z natury samego mnożenia, z którego bierze swój początek, trzeba więc w tym razie nowozrobionym 2go terminu ściennego czworogranem dopełnić danego pomiaru podług Przepisu następującego.

Przepis 5. Jeżeli czworogran terminu 2go ściany dwukrotney nie znajduje się z odciażnym znakiem w 2gięy pomiaru części z samych wiadomych ilkości złożoney, trzeba go zrobić i do obydwóch części przydać, którym przydatkiem równość między niemi bynajmniej się nie zepsuje, gdyż się też sama ilkość do równych przyda. Robi się zaś czworogran rze-
czo-

czony z połowy współczynnika terminu 2go il-
kości niewiadoméy, czego przyczyna iest w fa-
mym składzie każdego czworogranu, którą ka-
żdy łatwo postrzeże. Daymy *np*: pomiar czwo-
rogranny z Zagadnienia iakiego warunków wy-
padły: $x^2 + 2ax = b$. Biorąc przez Przep: 3ci
za termin 1wszy x^2 , za 2gi zaś $+ 2ax$, i wycią-
gając ścianę z x^2 , będzie 1wszym terminem x ,
przez którego dwóykę to iest przez $2x$ gdy
się podzieli termin 2gi $+ 2ax$, wieloraz $+ a$
będzie 2gim terminem ściennym, azatém cała
ściana $= x + a$; ale że czworogranu tegoż 2go
terminu ściennego nie masz w 2giey części,
trzeba go więc zrobić z połowy współczynni-
ka terminu 2go $+ 2ax$, będzie taką połową:
 $\frac{2a}{2} = a$, czworogran zaś z niéy będzie: $a \times a$
 $= a^2$, który przydawszy do obydwóch pomia-
ru części, będzie: $x^2 + 2ax + a^2 = b + a^2$
pomiar zupełny czyli zawierający w pier-
wszey części swéy doskonały czworogran scia-
ny dwukrotnéy $x + a$, która przez Przepis 4-
już wyciągniona, azatém pomiar zamieni się
w ten: $x + a = \sqrt{b + a^2}$; przeniósłszy zaś $+ a$
do 2giey części, będzie: $x = \sqrt{b + a^2} - a$ i t.d.

Przepis 6sły i ostatni na rezolwowanie za-
gadnień nie tylko czworogrannych lecz i wszel-
kich innych składanych iest tenże sam, który
w 1wszey części Rozdz: 2gim dany iest na re-
zolwowanie Problematów prostych, to iest:
ażeby zredukowawszy podług danych Przepi-
sów

sów pomiar do iednéy ilkości niewiadoméy, obrócić litery w zgiéy iego części umieszczone wyrażające ilkości wiadome na liczby, za które na po zątku działania były założone, a z liczb podług Przepisów § XI. ścianę wyciągnąć, ta będzie ostatnią rezolucyą danego zagadnienia; wreszcie doświadczyć téy rezolucyi przez roztrząśnienie: czy się stało zadosyć warunkom zagadnienia, np: w ostatnim pomie-

rze: $x = \sqrt{b + a^2} - a$, jeżeli a założone za 5, b za 24, obróciwszy litery na liczby i dodawszy pod znakiem ściennym położone, będzie $x =$

$\sqrt{24 + 25} - 5 = \sqrt{49} - 5$; nakoniec wyciągnąwszy ścianę czworokrotną z liczby 49, będzie: $x = 7 - 5 = 2$. Gdyby zaś z ilkości niewiadomych na liczby obróconych wyciągnąłwszy ścianę reszta iaka została; znakby był: iż liczba owa nie jest doskonale czworokrotna, azatém podług Przetłogi i wśzcy § XI. wyciągać, jeżeli się podoba, można też ścianę przez terminy niekończzone czyli przez przybliżanie *i t. d.*

Przetłoga 1. Zeby zaczynający nie mieli trudności w rozeznawaniu Pomiarów czworokrotnych zupełnych od niedopełnionych, niech uważają: I. jeżeli w i wśzym terminie danego pomiaru jest czworokran ilkości niewiadoméy, w 2gim zaś: czy jest i wśzy stopień téżże ilkości rozmnożony przez współczynnika liczbą lub literą wyrażonego lub domniemanego, a w 3cim

czworogran z połowy tegoż współczynnika zrobiony ; wtenczas pomiar w części , w której są rzeczone terminy ; będzie zupełny ; iaki jest ten : $x^2 + 2ax + a^2 = b$, w którym oprócz x^2 w 1wszym terminie , jest jeszcze w 2gim x z współczynnikiem $2a$, w 3cim zaś a^2 czworogran z połowy tegoż współczynnika to jest z $\frac{2a}{2}$ czyli z a . II. Jeżeli zaś nie masz w pomierze 3go terminu , albo choć jest , jeżeli nie jest czworogranem zrobionym z połowy współczynnika terminu 2go , pomiar taki jest niezupełny i potrzebuje dopełnienia , o którym się mówiło , taki jest : $x^2 + 2ax = b$, taki i ten : $x^2 + 2ax + 3a = b$; w 1wszym bowiem brakuje wcale 3go terminu , w 2gim choć jest ten termin , ale nie jest czworogranem , iakiego tu trzeba , zatém obydwóch dopełnić należy . Brak ten , żeby się prędzey dał poznać , wszystkie pomiaru terminy przenoszą się do jednéjże części i równają się z 0 , tak $x^2 + 2ax - b = 0$ i t. d.

Przeestroga 2. Uważać pilnie potrzeba : że po ostanteiy redukcyi pomiarów czworogranych , zatém po wyciągnienu już nawet z nich ściany , cena ilkości niewiadoméy w części drugiey umieszczona równie być może z znakiem $+$ lub $-$. I tak zredukowawszy pomiar : $y^2 - 2by - b^2 = a^2$, i ścianę z niego wyciągnawszy , może być albo $y - b = + a$ albo $y - b = - a$, gdyż czworogran , z którego ściana a wyciągniona , dodatny być powinien

nien, czy się zrobi z $\mp a \times \mp a$, czy z $-a \times -a$ podług przepisów mnożenia, więc ściana z $\mp a^2$ wyciągniona równie może być dodatna iak odciążna, więc zga część zredukowanego pomiaru może być $\mp a$. Jeżeli weźmie się za dodatną, przeniósłszy z 1wśzý do 2giý części — b, będzie $y = b \mp a$, ieżli za odciążną, będzie $y = b - a$. Te zaś dwie ceny iednéyże ilkości y, są bardzo odmienne i sobie przeciwne. Jakże tedy poznać, że $y = b \mp a$, a iak, że $y = b - a$? Poznanie tego nie naytrudniejszy. Przyysć do niego można przez uwaźne warunków zagadnienia roztrząsanie. Będzieli ilkość y od b więkfsza, pomiar: $y - b = a$ zamykać w sobie będzie ścianę dodatną, będzieli mnieysza, ściana iego będzie odciążna, np: ieżli $y = 36$, $b = 27$, $a = 9$, będzie $y - b = a = 36 - 27 = 9$, czyli $9 = 9$. Przeciwnie gdyby było $y = 27$, $b = 36$, $a = 9$, byłoby $y - b = -a = 27 - 36 = -9$, czyli $-9 = -9$; czyli w 1wśzym przypadku ściana $= 9$ byłaby dodatna dlatego: że y od b więkfsze, w 2gim odciążna, że y od b mnieysze, o czém dobrze pomnieć należy.

PRZYKŁADY POMIAROW CZWOROGRANNYCH.

Zagadnienie 1wśze. Pewna liczba Rzemieślników z czeladzią swą stanęła do roboty, każdy z Maystrów po tyle miał czeladzi, ile
samyh

famych Maystrów razem wszystkich wziętych było ; była zaś liczba wszystkiéy czeladzi = 625, pytam: iaka liczba Maystrów ?

Rezolucya. Niech będzie $625 = a$, liczba niewiadoma maystrów = x ; zważając pilnie warunki zagadnienia, oczywiście się pokazuje : że liczba niewiadoma maystrów równa się z liczbą czeladzi , gdy tamta wyniesiona będzie do 2go stopnia , gdyż wynosząc do tego stopnia, czyli mnożąc ją przez nią samą, wyjdzie tyle maystrów , ile każdy z nich miał czeladzi. Wynosząc więc x do 2go stopnia, będzie $x \times x = x^2$, a podług warunków zagadnienia będzie pomiar czworogranny : $x^2 = a$, który (ponieważ jest czyśty przez § XV) redukując , dosyć będzie ścianę czworograną przez Przepis 2. wyciągnąć z 1wszéy jego części , po którém wyciągnięciu zostanie $x = \sqrt{a}$, czyli przez Przepis 6. $x = \sqrt{625}$, albo wyciągając też samą ścianę z 2giéy części przez § XI. będzie $x = 25$. Było tedy maystrów 25. Albowiem $25 \times 25 = 625$. C. B. D. R.

Zagadnienie 2gie. Zwieziono posadzki kamiennéy lub marmurowéy czworogrannéy sztuk 576, która ma być dana w sali lub w inném mieyscu także czworogranném ; pyta więc, który ma ją dawać , po wiele sztuk wszérz i wzdłuż ma układać : żeby wszystka owa posadzka wyszła , czyli żeby nic z niéy nie zbywało , ani do niéy nie brakowało w układaniu do jednéyże miary rzędów ?

Re-

Rezolucya. Sztuki wzdłuż i wszérz mające się układać niech będą $= x$, którego czworogran $= x^2$. Ponieważ zaś i mieysce samo także ma być czworogrannę, więc pomiar będzie: $x^2 = 576$, czyli wyciągając z obydwóch części ścianę czworograną, przez § V. i XI, będzie: $x = 24$. Albowiem 24×24 , czyli wzdłuż i wszérz układając po 24 sztuk rzeczony posadzki, będzie $= 576$. C.B.D.R.

Zagadnienie 3cie. Rotmistrz z Towarzystwem swém z placu potyczki powróciwszy zapytany, ile nieprzyjacioł ręką swoją na placu położył, ręką, rzeczę, moją i towarzyszków moich legło 1296 głów nieprzyjacielskich; ta zaś rzecz godna uwagi: iż każdy z nas tyle zabił nieprzyjacioł, ile nas wszystkich razem było. Pytam, wielu towarzyszków z owym Rotmistrzem było i po wiele nieprzyjacioł każdy z nich na placu trupem położył?

Rezolucya. Niech będzie $1296 = a$, liczba towarzyszków $= x$; ponieważ więc każdy z nich tyle nieprzyjacioł zabił, ile ich samych było, będzie liczba zabitych równa liczbie towarzyszków wyniesionę do 2go stopnia, czyli będzie $= x^2$, a stąd pomiar: $x^2 = a$, z którego wyciągnąwszy ścianę czworograną przez Przepis 2, będzie: $x = \sqrt{a}$, czyli przez Przep: 6. $x = \sqrt{1296} = 36$. Było więc towarzyszków z Rotmistrzem 36, i każdy z nich położył nieprzyjacioł 36. Wszakże $36 \times 36 = 1296$. C. B. D. R.

Zaga-

Zagadnienie 4te. Piotr Kmiotek rzecze do Pawła Sąsiada swego : Jam czwórma korcami mniej pszenicy wysiał na zimę , niż ty ; a przecie gdyby z każdego ode mnie wysianego korca tyle się urodziło, ileś ty wysiał , miałbym na przyszły rok pszenicy korcy 165. Pytam , ile korcy pszenicy wysiał Piotr , a ile Paweł ?

Rezolucya : Korcy 165 $\equiv a$, korce zaś od Pawła wysiane $\equiv x$, więc podług warunku korce od Piotra wysiane $\equiv x - 4$, zatem gdyby korzec od Piotra wysiany zarodził tyle, ile wysiał Paweł , Piotr miałby pszenicy korcy : $x - 4 \times x \equiv x^2 - 4x$, te zaś niewiadome korce Pawła rozmnożone przez korce Piotra także niewiadome wyrównałyby ogólnie korcom 165 czyli byłyby $\equiv a$. Wypada tedy z warunków zagadnienia następujący pomiar : $x^2 - 4x \equiv a$. Co się redukcji tego pomiaru tycze, oczywista rzecz : że ten pomiar, w rwszłej części swojej jest niezupełny (§ XVIII. Przestrz. 1.) gdzie rwszym terminem jest x^2 , 2gim $-4x$, a 3go brakuje. Dopełniając więc , czyli przez Przepis 5. z połowy współczynnika 2go terminu to jest z $\frac{4}{2}$ czyli z 2 robiąc czworogran $\equiv 4$ i do obywoch części dodając , będzie : $x^2 - 4x + 4 \equiv a + 4$ pomiar zupełny, z którego ścianę czworograną wyciągnawszy przez § VI. będzie : $x - 2 \equiv \sqrt{a + 4}$. Przeniósłszy zaś -2 do 2giej części, będzie $x \equiv \sqrt{a + 4} + 2$, czyli przez Przepis 6. ilkość a obróciwszy na liczbę, będzie :

będzie $x = \sqrt{165 + 4} - 2$, czyli $x = \sqrt{169} - 2$, wyciągnawszy zaś tęż ścianę z 2giéy części, będzie przez § XI: $x = 13 + 2 = 15$. Paweł więc wysiał korcy 15, azatém Piotr korcy $15 - 4 = 11$. Wszakże $11 \times 15 = 165$, więc gdyby Piotrowi każdy korzec tyle zarodził, ile wysiał Paweł; miałby Piotr korcy 165. C. B. D. R.

Zagadnienie 5te. Dway Kawalerowie za powrotem od gry tak z sobą rozprawiają: pierwszy do drugiego mówi: ty widzę, Przyjacielu, czteroma Czerwonymi Złotemi więcej wygrał ode mnie; gdyby, odpowie drugi, summy wygranych od nas Czerw: Złł: zamieniły się w czworograny, czworograny te obydwu razem wzięte nie uczyniłyby tylko 400 Cz: Złł: Pytam, ile 1wszy, a ile 2gi czerwonych złotych wygrał?

Rezolucya. $4 = a$, $400 = b$, czerwone Złłł: od 1wszego wygrane $= x$, którego czworogran $= x^2$, od 2go wygrane $= x + 4$, czyli $x + a$, którego czworogran przez § III $= x^2 + 2ax + a^2$. Będzie zatém, dodawszy te dwa czworograny podług warunków zagadn: pomiar: $2x^2 + 2ax + a^2 = b$. Czyniąc tego pomiaru redukcją, naprzód przez Przepis 1. przenoszę a^2 do 2giéy części i cały pomiar dzielę przez 2, będzie: $x^2 + ax = \frac{b - aa}{2}$,

gdzie

gdzie widzę: iż 1wsza część niezupełnym jest
czworogranem. Dopełniam ięć więc czworo-

ranem $\frac{aa}{4}$ zrobionym z połowy współczyn-

nika 2go terminu ax czyli z $\frac{a}{2}$, przydając

go obydwom częściom, będzie: $x^2 + ax + \frac{aa}{4}$

$= \frac{b-aa}{2} + \frac{aa}{4}$; dopiero wyciągam z 1-

wszey części ścianę czworograną przez § VI,

będzie: $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{b-aa}{2} + \frac{aa}{4}}$ czyli prze-

niósłszy wiadomą ilkość do wiadomych i

obróciwszy litery na liczby, będzie: $x = \sqrt{\frac{400-16}{2} + \frac{16}{4}} = 2$, czyli zredukowawszy: $x =$

$\sqrt{196} = 14$, nakoniec przez Przepis 6: ścianę

wyciągnawszy: $x = 14 - 2 = 12$. Piérwszy

więc z owych Kawalerów wygrał Cz: Zł: 12,

a 2gi 12 + 4 = 16. Wszakże 12 × 12 = 144,

a 16 × 16 = 256, 144 zaś + 256 = 400.

C. B. D. R.

Zagadnienie 6ste. Kozacy Moskiewscy

Dworek Szlachecki najechawszy, wydarli Szla-

chcicowi Zł: Pol: 3,333; z podziału równego

tych pieniędzy przypadło na każdego we

troje tyle, ile wszystkich tych było najezdnic-

ków i nadto po Zł: 2. Pytam, ile było Ko-

zaków i po siła na każdego przypadło?

Re-

Rezolucya. Liczba niewiadoma Kozaków x , więc na każdego przypadło z podziału rabunku $3x \div 2$, co rozmnożywszy przez x czyli przez liczbę kozaków zapytaną, będzie produkt: $3x^2 \div 2x$, a zatem wypadnie pomiar: $3x^2 \div 2x = 3333$, który redukując, to jest naprzód: dzieląc przez 3 wszystkie terminy, będzie: $x^2 \div \frac{2}{3}x = 1111$, potem dopełniając czworogranu przez Przep: 3, czyli biorąc współczynnika terminu 2go i z połowy jego robiąc czworogran, to jest $\frac{2}{3}$ dzieląc przez 2, a wieloraz $\frac{2}{3}$ wynosząc do 2go stopnia, będzie przez § II. p. IV. czworogran $\frac{4}{36}$, który dodawszy do obydwóch części, będzie dopełniony pomiar: $x^2 \div \frac{2}{3}x \div \frac{4}{36} = 1111 \div \frac{4}{36}$. Obracając zaś liczbę całkowitą do przyległej frakcyi podług reguł Arytmetycznych, to jest przez 36 mnożąc całkowitą, a do produktu przydając 4, będzie: $x^2 \div \frac{2}{3}x \div \frac{4}{36} = \frac{4000}{36}$. Z tego już pomiaru naprzód z części 1wszej wyciągając ścianę czworograną przez § VI. będzie $x \div \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{40000}{36}}$. Wyciągając zaś i z 2giej części też ścianę przez § XI. będzie: $x \div \frac{2}{3} = \frac{200}{6}$; nakoniec przenosząc $\div \frac{2}{3}$, będzie: $x = \frac{200}{2} = \frac{198}{2} = 33$.

Było więc Kozaków 33, każdy zaś biorąc we troje tyle, ile wszystkich było, i nadto Zł: 2, wziął $33 \times 3 = 99 + 2 = 101$. Jakoż $101 \times 33 = 3333$. C. B. D. R.

Zagadnienie 7me. Kawalerowie z Dami w pewnym posiedzeniu umówili się o taką

skła-

Składkę pieniężną na wsparcie Szpitala Dzieciątka Jezus : żeby każdy z przytomnych Kawalerów dał przez połowę tyle Czer: Zł: ile wszystkich razem było Kawalerów i nadto jeszcze Cz: Zł: 3. Damy zaś żeby 3cią część téj kwoty złożyły , którą każdy w szczególności Kawaler ofiarował. Było zaś Dam trzy razy więcej niż Kawalerów , a składka cała wyniosła na Cz: Zł: 720. Pytam , ile wszystkich było Kawalerów , a ile Dam , tudzież posiła na Osobę każdą przypadło dać do powszechnéj składki ?

Rezolucya. Niech będzie liczba Kawalerów $= x$, toć Dam $= 3x$, składka Kawalerów $= \frac{x}{2} \times 3$. składka zaś Dam , ponieważ 3cią częścią tylko ma być składki Kawalerskiey , przez 3 dzieląc $\frac{x}{2} \times 3$, będzie $= \frac{x}{2} \times 1$. Mnożąc już składkę Kawalerów to jest : $\frac{x}{2} \times 3$ przez ich liczbę niewiadomą czyli przez x , będzie $\frac{xx}{2} \times 3x$, podobnie i składkę Dam $\frac{x}{2} \times 1$ mnożąc przez ich liczbę czyli przez $3x$ podług warunku , gdyż Dam wetroje więcej było , niż Kawalerów , będzie $\frac{3xx}{2} \times 3x$; aże składki te obydwie czynią Czerw: Zł: 720 , wypada pomiar:

$$\frac{xx}{2} \times 3x \times \frac{3xx}{2} \times 3x = 720.$$

$$\text{Czyli: } \frac{xx}{2} \times 6x \times \frac{xx}{2} = 720.$$

$$\text{Czyli: } x^2 \times 12x \times x^2 = 1440.$$

$$\text{Czyli: } 2x^2 \times 12x = 1440.$$

Nakoniec: $x^2 \times 6x = 720$ pomiar niezupełny. Dopełniając go więc przez Przepis 5. to jest z połowy 2go terminu to jest : z 3 uczyniony

czworogran 9 dodając do obydwóch części, będzie: $x^2 + 6x + 9 = 720 + 9$. Nareszcie przez § VI. i XI. wyciągając ścianę czworograną z obydwóch części, będzie: $x + 3 = 27$, czyli $x = 27 - 3 = 24$. Było więc Kawalerow 24, Dam zaś wetroje tyle, więc $24 \times 3 = 72$. Dał zaś każdy Kawaler przez połowę tyle, ile ich wszystkich było i nadto 3, więc dał $\frac{24}{2} = 12 + 3 = 15$, azatém wszyscy Kawalerowie złożyli 15×24 sumnę Cz: Zł: = 360: toć Damy dając 3cią część tego, co każdy dał Kawaler, czyli 3cią część 15, to jest po 5 Cz: Zł, złożyły sumnę Cz: Zł: $72 \times 5 = 360$. Lecz $360 + 360 = 720$ Cz: Zł. C.B.D.R.

Zagadnienie 8me. Kupiec zaprzestając handlu, ciekawością nabawia swych Kollegów: iakiby był iego majątek. O co od jednego z nich zapytany taką daje odpowiedź: gdyby summa pieniężna wyrównywająca memu majątkowi pięćdziesiąt razy była odciągniona od czworogranu téżże summy; miałbym 399 millionów Złot: Pytam: czy ów Kupiec takim jest bogaczem, iakim się być zdaje?

Rezolucya. Summa majątkowi Kupca wyrównywająca niech będzie = x , millionów 399 = a , 50 = b . Wypada z warunków zagadnienia niezupełny (przez § XVIII. Przestr: 1.) pomiar: $x^2 - bx = a$; którego dopełniając przez Przep: 5, czyli biorąc połowę współczynnika terminu 2go i wynosząc do 2go stopnia, a ten przydając do obydwóch części pomia-

pomiaru, będzie: $x^2 - bx \mp \frac{b^2}{4} = a \mp \frac{b^2}{4}$.

Wyciągając zaś ścianę czworogranną z -
wfszćy pomiaru części, będzie: $x - \frac{b}{2} = \sqrt{a \mp \frac{b^2}{4}}$ przez § XVIII. Przestr: 2. Przenosząc -
 $\frac{b}{2}$ do zgićy części i litery na liczby obracając,
będzie: $x = \frac{50}{2} \mp \sqrt{399,000,000; \mp 2500}$, o-
bróciwszy zaś frakcyą na całkowitą i 625 przy-
dawszy do poprzedzającćy, będzie z summy
tćy ściana czworogranna wyciągnionona albo
 ∓ 19975 , albo - 199775 przez Przestroę 2. §
wzmiankowanego; azatém 1wszy termin $\frac{50}{2}$
czyli 25 albo przydany do ściany ∓ 19975
pokaże: iż kupcie ów porzucający powoła-
nie swoje ma Zł: 20,000, albo też od ścia-
ny - 19975 odciągniony, wyjawi: iż tenże
kupiec winien rzetelnego długu Zł: 19,950,
a tak bardzo wątpliwy iest stan majątku tegoż
Kupca. Zważywszy atoli, co się rzekło pod
§ XVIII. Przestr: 2, że w przedostatnim pomie-
rze: $x - \frac{b}{2} = \sqrt{a \mp \frac{b^2}{4}}$ ilkość x większa iest
niż $\frac{b}{2}$, bo ilkość $\frac{b}{2}$ iest $= \frac{50}{2}$ czyli $= 25$,
a ilkość x wyraża sumnę, która od czworo-
granu z nićy samćy uczynionego odciągnio-
na podług warunku zagadnienia dać powinna
resztę $= 399$ Millionów, wniesć można: że
wyciągniona z liczby pod znakiem ściennym
położonćy ściana 19975 iest dodatna, azatém
przydana do $\frac{b}{2}$ czyli do 25 wyraża rzetelny
Kupca majątek nie millionowy wprawdzie,
iak się mogło komu zdawać, ale tysiączny $=$
20,000. Jakoż roztrząsając warunki Zagadnie-

nia, Rezolucya ta okaże się do prawdy podobniejsza. Biorąc bowiem 50 razy 20,000, to jest mnożąc tę sumę przez 50, a produkt $= 1,000,000$ odciągając od czworogranu téż summy to jest od liczby 400,000,000; zostanie reszta, iaka w Zagadnieniu była warowana to jest: 399 millionów. Przeciwnie gdyby wynaleziona ściana 19,975 za odciążną była wzięta i od nię 25 odciągnięte były, reszta 19950 nie uczyniłaby zadość warunkom Zagadnienia, gdyż summa 19950 wzięta 50 razy i od czworogranu swego odciągnięta nie dałaby reszty w Zagadnieniu warowaney $= 399$ millionów. C. B. D. R.

Zagadnienie 9te. Pewny z Kapitałistów daje na handel 10,000 Czer: Zł: kupcowi, umówiwszy się z nim o roczny procent; ale kupiec w rok zaraz po wzięciu téż summy bankrutować zaczyna; prosi atoli: ażeby mu wierzyciel do 2go roku czekał pożyczonę summy wraz z procentem. Po upłynionych dwóch latach gdy się byt kupca nie polepsza, a Kredytorowie przyciskaia go o wypłacenie długów, podaje cały majątek swój ruchomy i nieruchomy na prawny między tychże kredytorów podział, czyli, iak mówią, *in potioritate*. Po prawném rozładzeniu żaden z Kredytorów należitości swoięy nie odbiera bez defalki, a w szczególności wzmiankowany Kapitałista straciwszy dwuletnią prowizyą, na samym nawet Kapitale znacznie uszkodzony zostaje-

zostaje, nie odzyskując z 10,000 Czer: Złot: tylko 8,100. Pyta więc po siła na ftu traci?

Rezolucya. Ponieważ 8,100 odzyskał, więc na Kapitale 10,000 stracił ogólnie 1,900 Cz: Zł: , gdyż 10,000 — 1900 = 8,100. Jle zaś w szczególności na każdym ftu stracił, szukać trzeba przez Regułę proporcyi, założywszy — x za niewiadomą stratę, będzie: 100. — x : : 10,000. (mnożąc 3ci termin przez 2gi, a produkt dzieląc przez 1wszy) strata po roku = — 100 x ; po 2gim zaś, podobnie działając, a przepisy na znaki w mnożeniu i dzieleniu zachowując, będzie: 100. — x : : 10,000 — 100 x . strata = — 100 x + x^2 . Zebrawszy już, te dwie straty w iedną sumę, i z ogólną stratą zrównawszy, wypadnie pomiar czworogranny: — 200 x + x^2 = — 1,900. Czyli: x^2 — 200 x = — 1,900. Dopełniając zaś pomiaru, czyli dodając do obydwóch jego części czworogran zrobiony z połowy współczynnika 2giego terminu; będzie: x^2 — 200 x + 10,000 = — 1,900 + 10,000. Wyciągając ścianę z 1wszhey pomiaru części przez § VI, będzie: x — 100 = $\sqrt{-1,900 + 10,000}$. Odciągając 1,900 od 10,000, będzie: x — 100 = $\sqrt{8,100}$. Wyciągając też ścianę z 2giey części przez § XI, będzie przez Przestrogę 2. § XVIII: x — 100 = ± 90 , to iest: = albo + 90, albo też — 90. Biorąc nakoniec wyciągnioną ścianę za odciażną z przyczyny w téyże Przestrodze wy-

śliczno-

śuszczonéy, i przenosząc wiadome do wiadomych, będzie: $x = 100 - 90 = 10$. Wszakże ieżli kupiec ów w pierwszym roku stracił 10 na 100, toć na 10,000 stracił 1,000 (gdyż: 100. 10 :: 10,000. 1,000.) i nie zostało mu z kapitału na rok 2gi tylko 9,000, toć w roku 2gim 10 tracąc na 100, na 9,000 stracił 900 (gdyż 100. 10 :: 9,000. 900.) A że $1000 - 900 = 1,900$ stracie ogólnéy, więc po 10 na 100 stracił. C. B. D. R.

Zagadnienie 10te. Ociec unierający zostawił młodocianemu Synowi swemu intraty rocznéy Czer: Zł: 200. Naznaczony sierocie Opiekun i obowiązany: aby, ile możności, powiększał śzczupłą tę jego intratę. Jakoż Opiekun w 1wszym zaraz opieki swéy roku z odebranéy wcześnie owéy intraty odłożywszy na potrzeby Młodzieńca Cz: Zł: 100, a resztę to jest 2gie 100 na prowizyą dawszy, znacznie powiększył przerzeczoną jego intratę; ale znaczniéy ją ieszcze powiększył na drugi rok, gdy z pierwszorocznéy téy całéy intraty nie wdawszy tylko Cz: Zł: 130, oszczędził 70 i dał znouu na podobną prowizyą. Wiadomo zaś nie jest: na jaką prowizyą oszczędzone owe Czer: Zł: 100 na początku 1go roku były dane, to tylko po upłynionych dwu latach opieki pokazało się: iż z téy dwuletniéy prowizyi do intraty od Oycza zostawionéy przybyło Młodzieńcowi Czer: Zł: $14 + \frac{31}{32}$ (na Zagadnienia podobne bez frakcyi będzie Rezolucya

zolucya 2ga i 3cia ogólna) Pytam: na jaką prowizyą wzmiankowane Czer: Zł: 100 były oddane?

Rezolucya 1. Pieniądze od wydatku pierwszorocznego odcięte i na prowizyą dane to jest Czer: Zł: 100 = a, odcięte zaś od drugorocznego wydatku Czer: Zł: 70 = b, powiększenie intraty Czer: Zł: 14 + $\frac{31}{15}$ = d, prowizya od 100 niewiadoma, podzieliwszy a =

100 przez x, będzie = $\frac{a}{x}$. * Po roku więc owa sierota mieć będzie intraty Cz: Zł: 200

+ $\frac{a}{x}$, a że z téj intraty na początku 2go roku

ku

(*) Prowizye od summ Kapitałnych różne są w różnych Krajach. W naszym późniejszym prawem ustanowiona prowizya świecka jest po 5 od sta, aże 5 jest zostą częścią sta, prowizya taka wyrazić się może tą frakcyą $\frac{100}{20}$, gdyż frakcyą tę obracając na liczbę całkowitą wypada wieloraz 5 to jest prowizya po 5 od 100, gdyż w 100 dwadzieścia razy zawiera się 5 to jest prowizya wzmiankowana. Podobnym sposobem wszelką inną prowizyą albo prawem, albo zwyczajem uchwaloną wyrazić można np: prowizyą po 4 od 100, ponieważ 4 w 100 mieści się 25 razy, wyrazi frakcyą $\frac{100}{25}$ i t. d. iako się namieniło w Części I. w Przestrodze pod Zagad: 1. o defalkach. Gdy więc prowizya będzie niewiadoma, iako jest w tém Zagadnieniu, założywszy za nią x, dobrze się wyrazi przez frakcyą $\frac{100}{x}$, albo założywszy za 100 literę a, przez

frakcyą literalną: $\frac{a}{x}$.

ku odcięte Czer: Zł: 70 i znowu na prowizyą są dane, przybędzie do intraty pierwszorooczney w 2gim roku summa Czer: Złol: 70

a x a

*— czyli b *—, od której chcąc wynaleść

x x

prowizyą, potrzeba b *— przez x podzielić

x

tak, iak się pospolite frakcye dzielą, będzie tedy powiększenie drugoroczney intraty:

1 b a b a

— x —*— x — x — x —, azatém po upłynio-

x 1 x x x^2

nym czasie dwuletniey opieki ogólne teyże

intraty powiększenie będzie a b a

x x x^2

Ze zaś to powiększenie według warunku zagadnienia iest $= 14 + \frac{31}{36} = d$, więc nastę-

a b a

pujący wypada pomiar: $d =$ —*—*—,

x x x^2

w którym gubiąc frakcye, czyli mnożąc przez x^2 wszystkie inne terminy (iak się uczyło w

ax^2 bx^2

Części I. na kar: 66) będzie: $dx^2 =$ —*—

x x

+— a . Obracając zaś frakcye na całkowite, to iest: przez mianownika x dzieląc liczników, będzie: $dx^2 = ax + bx + a$. Przenosząc: $dx^2 - ax - bx = a$. Dzieląc przez d :

x^2

$$ax - bx = a$$

$$x^2 - \frac{bx}{d} = \frac{a}{d}. \text{ Tak zredukowa-}$$

ny pomiar, odłączysz ilkość x od współ-
czynnika swych a i b , a rozmnożenie przez
nią obydwóch terminów znakiem mnożenia
wyraziwszy, zamieni się w następujący: $x^2 -$
 $\frac{bx}{d} = \frac{a}{d}$

$$\times x = \frac{a}{d}; \text{ gdzie dla ułatwienia dalszég}$$

$$\text{redukcji za } \frac{a}{d} \text{ założysz } f, \text{ bę-}$$

$$\text{dzie nowy pomiar czworogr: } x^2 - fx = \frac{a}{d};$$

w którym, ponieważ część iwsza jest niezu-
pełna przez § XVIII. Przestr: 1, dopełniając
i, przydać trzeba do obydwóch pomiaru czę-
ści czworogran zrobiony z połowy współczyn-
nika 2go terminu; ; tym sposobem pomiar do-
pełniony będzie: $x^2 - fx + \frac{f^2}{4} = \frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}$

$$\text{z którego iwszég części wyciągnąwszy ścianę}$$

$$\text{czworogranną przez § VI, a w zgigé wyrazi-}$$

$$\text{wszy toż wyciągnięcie znakiem ściennym, bę-}$$

$$\text{dzie } x - \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}} \text{ czyli: } x = \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}}. \text{ Naostatek obróciwszy litery}$$

$$\text{na}$$

na liczby w zgięciu pomiaru części, a z liczb wyciągnąwszy ścianę czworogranną przez § XI. wypadnie: $x = 12$ to jest: zapytana prowi-
 zya. Ale że zaczynający mogliby mieć tru-
 dność w tém obracaniu liter na liczby ró-
 wnie iak w wyciąganiu z liczb ściany czworo-
 rogrannéy; więc dla ułatwienia téy roboty,
 tudzież dla dania do innych podobnych praw-
 dła, całe to działanie wyśfuszyć naydokła-
 dniéy należy. *Naprzód*: założone były litery
 za liczby a za 100, b za 70, d za powię-
 kszczenie intraty czyli za $14 \frac{31}{38}$. Cz: Żł: to
 jest: za $\frac{535}{38}$, nakoniec dla łatwiejszégó pomia-

a—b

ru redukcji za frakcyą — — — — — założyła się
 d

ilkość — f, a że po ostatniéy pomiaru redu-
 kcji też ilkość — f przeniesiona jest do zgięty
 części z odmiennym znakiem, więc iako — f

a—b

zamieniło się w $\ast f$, tak — — — — — zamieniło się
 d

a \ast b,

musi w $\ast \frac{a \ast b}{d}$, azatém frakcyą tę literalną

obracając na liczby, będzie $= \frac{100 \frac{1}{2} 70}{\frac{33 \frac{1}{2}}{38}}$; czyli
 dodawszy 70 do 106, a sumę 170, tudzież
 170szego mianownika 535 podzieliwszy przez
 5, będzie na mnieysze terminy zredukowana
 frakcyą: $\frac{34}{107}$; nakoniec podzieliwszy $\frac{34}{107}$ przez

36 tak, iak się pospolite frakcyę dzielą, będzie :
 $\frac{1224}{107}$, a zatem będzie $f = \frac{1224}{107}$, więc połowa ilkości
 f czyli $\frac{f}{2} = \frac{612}{107}$, a czworogr: téy połowy : $\frac{a}{d}$

$$\frac{612}{107} \times \frac{612}{107} = \frac{374544}{11449}, \text{ a zatem } x = \frac{f}{2} \ast \sqrt{\frac{a}{d}} \ast$$

$$\frac{f^2}{4} = \frac{612}{107} \ast \sqrt{\frac{a}{d}} \ast \frac{374544}{11449}. \text{ Powtó-}$$

$$\text{re : } \frac{a}{d} = \frac{100}{\frac{533}{16}}, \text{ czyli dzieląc } \frac{100}{533} \text{ przez } 5, \text{ a}$$

$$\text{wieloraz } \frac{20}{107} \text{ dzieląc przez } 36, \text{ będzie : } \frac{a}{d} =$$

$\frac{720}{107}$. Téy już frakcyi obydwa terminy przez ie-
 dnąż liczbę rozmnożywszy np: przez tegoż sa-
 mego mianownika 107, walor iów bynaye-
 mniéy nie odmieniony, będzie $= \frac{77040}{11449}$, a tak

$$\text{będzie : } \frac{a}{d} = \frac{77040}{11449}. \text{ Cały tedy pomiar zredu-}$$

kowany do iednéy niewiadoméy ilkości bę-

$$\text{dzie : } x = \frac{612}{107} \ast \sqrt{\frac{77040}{11449} \ast \frac{374544}{11449}}, \text{ czy-}$$

$$\text{li dodając, będzie : } x = \frac{612}{107} \ast \sqrt{\frac{451584}{11449}}.$$

Wyciągając zaś z liczby pod znakiem położo-
 néy ścianę czworogranną przez § XI. będzie
 $x = \frac{612}{107} \ast \frac{672}{107}$. Albowiem wyciągając ją na-
 przód z licznika 45, 15, 84 przez rzeczony §,
 będzie czwor: 36 z tabliczki wzięty bliski liczby

w 1wszém przedziałce umieszczoném 45, którego ściana 6 położy się za 1wszy termin ścienny, a tego czworogran 36 odciągnąwszy od 45, i do reszty 9 przyłączywszy 2gą przedziałkę 15, toż odcięte liczby 91 podzieliwszy przez dwójkę znanego 1wszego terminu to jest przez 12, wieloraz 7 będzie 2gim terminem ściennym, który przyłączony do dzielnika 12 i z nim razem rozmnożony przez siebie samego uczyni 839, co odciągnąwszy od 915 i do reszty 26 przyłączywszy 3cią przedziałkę 84, będzie 268,4; podzieliwszy zaś 268 przez dwójkę obydwóch terminów ściennych za ieden wziętych czyli przez 134, wypadnie termin 3ci ścienny = 2, który złączony z tymże dzielnikiem i rozmnożony z nim przez siebie samego uczyni 2684, naostatek produkt ten odciągnąwszy od reszty przedziałki 2gię i od całej 3cię, nic nie zostanie, a zatem ściana z licznika wyciągniona = 672. Podobnym sposobem wyciągnąwszy ją z mianownika, będzie = 107 więc $x = \frac{612 \frac{6}{10} 672}{107} = \frac{1284}{107} = 12$. Oszczędzone tedy 100 Czer: Zł: i na prowizyą po 12 od 100 w 1wszym opieki roku dane były. W samém bowiem rzeczy, kiedy Cz: Zł: 100 dane na prowizyą przyniosły zysku 12, zysk ten jest = $\frac{100}{12}$, a zatem pierwszoroczna intrata = $200 \times \frac{100}{12}$; z której 130 odłożywszy na wydatki, a resztę = $70 \times \frac{100}{12}$ na podobną po 12 od 100 prowizyą dawszy, będzie też prowizya = $\frac{70}{12} \times \frac{100}{12} \times \frac{100}{12}$ intrata-

tratę drugoroczną powiększająca, do której łącząc zysk i wzoroczny $= \frac{100}{12}$, będzie ogólne powiększenie intraty sierocę po dwu latach opieki $= \frac{100}{12} + \frac{70}{12} + \frac{100}{144}$, czyli obróciwszy te frakcye do jednego mianownika, będzie: $\frac{300}{36} + \frac{210}{36} + \frac{25}{36} = \frac{535}{36} = 14 + \frac{31}{36}$. C.B.D.R.

Rezolucya 2ga. Gdyby rzeczony dwuroczny zysk był całkowitą liczbą wyrażony np: gdyby był $= 18$ natenczas byłoby $d = 18$,

$$\begin{array}{rcl} a \times b & 170 & f \\ f & = & \text{byłoby} = \text{---}, \text{ azatém połowa} = \\ d & 18 & 2 \\ 85 & & f^2 \\ = & \text{---}, \text{ czworogran zaś téy połowy} = & = \\ 18 & & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 85 & 85 & 7225 \\ \text{---} \times \text{---} = & \text{---}; \text{ nakoniec} = & \text{---}, \\ 18 & 18 & 324 \end{array}$$

czyli mnożąc obadwa terminy przez iednę z liczbę np: przez 18, byłoby: $\text{---} \times \text{---} = \text{---};$ ca-

$$\begin{array}{rcl} 18 & 18 & 324 \\ f & a & f^2 \end{array}$$

$$\text{ły, więc ów pomiar: } x = \frac{\text{---}}{2} + \sqrt{\frac{\text{---}}{d} + \frac{\text{---}}{4}}$$

$$\text{zamieniłby się w następujący: } x = \frac{85}{18} + \sqrt{\frac{1800}{324} + \frac{7225}{324}}$$

$$\sqrt{\frac{1800}{324} + \frac{7225}{324}}, \text{ czyli } x = \frac{85}{18} + \sqrt{\frac{9025}{324}};$$

a wyciągnąwszy z liczby pod znakiem ścien-
nym położony ścianę czworogranną przez S
Xl, wypadłby prosty pomiar: $x = \frac{85}{18} + \frac{25}{18} =$
 $\frac{110}{18} = 10$ to jest: prowizya od 100 Czerw: Zł:
w 1wszym roku oszczędzonych. Gdyż biorąc
10 od 100 w 1wszym, a od $70 + \frac{100}{18}$ w 2gim
roku, byłoby ogólne powiększenie dwuletniej
intraty $= \frac{100}{18} + \frac{70}{18} + \frac{100}{10 \times 18} = 10 + 7 + 1$
 $= 18$. C. B. D. R.

Rezolucya 3cia ogólna. Zgaadnienie to sa-
mo może się ogólnym sposobem rezolwować,
azatém do wielu innych podobnych przypa-
dków przyśtosować. Niech będzie intrata od
Oyca Synowi zostawiona nieokreślona $= r$,
wydatek pierwszoroczny $= a$, drugoroczny
 $= b$, powiększenie intraty z oszczędzonych
tych wydatków dwuletnich $= d$, będzie re-
szta z intraty 1wszorocznej, odciawszy od
niej wydatek, $= r - a$, prowizya zaś od
niej będzie: $\frac{r-a}{x}$, przeto cała 1wszoroczna

intrata $= r + \frac{r-a}{x}$, od której odciawszy

wydatek 2go roku $= b$, będzie reszta intra-
ty natenże rok $= r - b + \frac{r-a}{x}$, a tę dając

znowu na prowizyą x , będzie prowizya ta $=$

$r - b$

$$\frac{r-b}{x} + \frac{r-a}{x^2}; \text{ nareście przyłączywszy do téy}$$

$$\text{prowizyi i w szoroczną} = \frac{r-a}{x}, \text{ będzie po-}$$

$$\text{większenie ogólne dwuletniéy intraty} = \frac{r-a}{x}$$

$$+ \frac{r-b}{x} + \frac{r-a}{x^2}, \text{ czyli zredukowawszy i-}$$

$$\text{wsze dwa terminy, będzie} = \frac{2r-a-b}{x} + \frac{r-a}{x^2}.$$

Tu już dla ułatwienia dalszéy redukcji zakładając litery pojedyncze za wielokrotne, to jest: m za $2r-a-b$, c zaś za $r-a$, będzie

$$\text{ogólne intraty powiększenie} = \frac{m}{x} + \frac{c}{x^2};$$

ażé za toż powiększenie na początku założyło się d; więc wypadnie pomiar: $\frac{m}{x} + \frac{c}{x^2} = d,$

który uwalniając od frakcyi, czyli mnożąc przez mx^2

$$x^2, \text{ będzie: } \frac{m}{x} + c = dx^2, \text{ dzieląc i w szy ter-}$$

$$\text{min, będzie: } mx + c = dx^2, \text{ przekładając } mx \text{ do zgiéy części, będzie: } c = dx^2 - mx, \text{ na-}$$

ostatek

ostattek dzieląc przez d, będzie : $\frac{c}{d} = x^2$

$\frac{mx}{d}$, czyli $x^2 = \frac{mx}{d} = \frac{c}{d}$ pomiar czworog:

w którym obróciwszy litery wyrażające ilkości wiadome na liczby i ścianę czworokątną wyciągnąwszy, znajdzie się prowidza zapytana. Daymy np: że r (czyli intrata roczna od Oyca Synowi zostawiona) = 400 Cz: Zł., a (czyli wydatek 1wzoroczny) = 200 Cz: Zł, b (czyli wydatek drugoroczny) = 260, d (czyli powiększenie intraty) = 36, więc m (ponieważ założone było za 2r — a — b) = 340, c zaś założone będąc za r — a = 200, azatém zredukowany ostatni pomiar : $x^2 = \frac{mx}{d} = \frac{c}{d}$

— obróciwszy na liczby, zamieni się $\frac{d}{d} = \frac{d}{d}$

w ten : $x^2 = \frac{340x}{36} = \frac{200}{36}$, który, iako widoczna, nie jest zupełny; dopełniając go więc czyli z połowy współczynnika 2go terminu robiąc czworokątny, to jest: przez $\frac{2}{3}$ dzieląc frakcyą $\frac{340}{36}$, albo raczey wśpak obróciwszy dzielnika, przez $\frac{1}{2}$ mnożąc ją, a produkt $\frac{340}{72}$ wynosząc do 2go stopnia, będzie : $\frac{115600}{5184}$, który do obywoch pomiaru części dodając, będzie dopełniony pomiar : $x^2 = \frac{340x}{72} + \frac{115600}{5184} = \frac{200}{36} + \frac{115600}{5184}$. Dopiero wyciągając z 1włzey części ścianę czworokątną, będzie 1włzy termin ścienny

ścienny : $\equiv x$, przez którego dwóykę to jest przez $2x$ dzieląc — $\frac{340x}{35}$ (podłożywszy 1 pod $2x$ i przez $\frac{1}{2x}$ rozmnożywszy — $\frac{340x}{35}$) będzie $x \equiv \frac{340x}{72}$ czyli podług reguły dzielenia, x tak w liczniku, iako i w mianowniku wymaza-
wszy, będzie ściana zupełna: $x \equiv \frac{340}{72}$, z której czworogran zrobiony i od iwszēy czę-
ści odciągniony żadnēy reszty nie zostawi,
ażatēm pomiar co do iwszēy części zreduko-
wany będzie : $x \equiv \frac{340}{72} \equiv \sqrt{\frac{200}{36} \mp \frac{115600}{3184}}$,
czyli $x \equiv \frac{340}{72} \mp \sqrt{\frac{200}{36} \mp \frac{115600}{3184}}$. Chcąc zaś
wyciągnąć tęż ścianę z 2giēy części z terminów
pod znakiem położonych, obrócić wprzód po-
trzeba frakcye do iednego mianownika, mno-
żąc przez 144, będzie : $\frac{28860}{3184} \mp \frac{115600}{3184}$, a te do-
dając, będzie : $x \equiv \frac{340}{72} \mp \sqrt{\frac{144400}{3184}}$, toż wy-
ciągnąć rzeczoną ścianę przez § XI. z liczni-
ka i mianownika, będzie : $x \equiv \frac{340}{72} \mp \frac{380}{72}$,
czyli dodając: $x \equiv \frac{720}{72} \equiv 10$. Pozostała więc
summa od wydatku iwszorocznego $\equiv 200$
Cz: Zł: była dana na prowizyą po Cz: Zł. 10 od
100. Jakoż biorąc po 10 do 100, wypada ogól-
ne powiększenie intraty przez dwa lata: $\frac{200}{10} \mp$
 $\frac{140}{10} \mp \frac{200}{10 \times 10} \equiv 20 \mp 14 \mp 2 \equiv 36$. C.B.D.R.

Przeestroga. Można łatwo z istoty zaga-
dnienia ostatecznego wyczerpnąć tę wiadomość
arcy-potrzebną : że gdyby z podobnemi warun-
kami powiększania corok sierocēy intraty o-
pieka dalēy się ciągnęła, intrata owa coraz
bardziēy pomnażałaby się, np: gdyby opieka
przez 3 lub 4 lata trwać miała, w rezolwo-

waniu takiego zagadnienia pomiar wypadłby w 3cim lub 4tym stopniu tak dalece, że w zagadnieniach tego gatunku ekwacye mogłyby wszelkich domyslnych stopniów dochodzić. Co rzeczywistym jest dowodem: że różne społeczeństwa ludzkiego interesa nie łatwo się obeydą bez téy nawet części Algebry, która o pomiarach wyższe stopnie w sobie zawierających traktuje. Nie jest to tedy ciekawość iaka prożna zabawce dowcipu służąca, szukać sposobów rezolwowania trzeciostopniowych, lub nad 3ci wyższe jeszcze stopnie w sobie zawierających pomiarów, ponieważ ciekawość ta rodzi się z potrzeb towarzystwa ludzkiego nieuchronnych. Z tego powodu przyda się tu jeszcze krótka nauka licznemi przykładami objaśniona o Pomiarach nad 3gi stopień wyższych.

ROZDZIAŁ VI.

O Pomiarach Sześciogrannych i ich redukcji.

NIm się przyydzie do redukcji tych pomiarów, należy wprzód krótko przełożyć wewnętrzny ich skład, różność ścian w nich ukrytych i odmiany terminów też pomiary składających, bez czego redukcji saméy uczynić nie można.

§ XIX. Skład wewnętrzny tych pomia-

miarów, owszem i nad te wyższych dorazu się okaże, wzięwszy iakiekolwiek ściany i na pomiary je proste obróciwszy, które gdy się przez siebie rozmnożą, wypadną w produkcie pomiary składane tylu stopniów, ile się ścian do mnożenia wzięło, a te cały skład swój na oko pokażą; np: wzięwszy $x=a$, $x=b$, $x=c$, czyli: $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$ przez § XVI. p. II, i rozmnożywszy 1wszy z tych prostych pomiarów przez 2gi, a produkt przez 3ci, wypadnie pomiar sześciogranny przez tenże §. p. III.

$$\begin{aligned} x^3 & - ax^2 + abx \\ & - bx^2 + acx - abc = 0. \\ & - cx^2 + bcx \end{aligned}$$

który gdyby był rozmnożony przez inny prosty, zamieniłby się w czwartostopniowy *i t. d.* a iak tego, tak i innych skład z samych terminów oczywiście dałby się widzieć.

§ XX. Co się tycze ścian sześciogranych i innych wyższostopniowych, wiedzieć trzeba I. Ze w każdym składanym pomierze tyle ścian być musi, ile niewiadoma ilkość w 1wszym terminie zawarta ma w sobie wymiarów stopniowych, to jest: w pomierze sześciogrannym trzy zawsze być muszą ściany, w czwartostopniowym 4, *i t. d.* II. Ilkości wiadome w 2gim terminie zawierają sumę wszystkich ścian pod znakiem przeciwnym, to jest: ściany dodatne pod znakiem —, odciążne pod znakiem +, w 3cim zaś terminie zawierają

dukt dwóch ścian pod znakiem własnym, a w 4tym produkt wszystkich ścian pod znakiem przeciwnym, co oczywiście daje się widzieć w przykładzie wyżej przytoczonym; a stąd już można się dorozumiewać, które i jakie ściany pomiar składany w sobie zawiera. *III.* Ile jest terminów z odmiennemi znakami — i * na przemiany położonych w pomierze składanym, tyle jest ścian rzetelnych, a tyle odciążnych, ile terminów jednoznacznych, które będąli wszystkie dodatne, ściany wszystkie muszą być nierzetelne, i przeciwnie. *IV.* Ile razy ściany rzetelne równe są nierzetelnym, tyle razy zgi termin pomiaru ginie, *np:* jeśli $x=2$, potem $x=3$, nareście $x=5$, zrobiwszy z tych trzech prostych pomiar sześciogranny, będzie bez zgo terminu x^3 — $19x + 30 = 0$. Jeśli zaś ścian rzetelnych więcej jest od nierzetelnych, termin zgi musi być odciążny, i przeciwnie. *V.* Na poznanie, iaka jest ściana: dodatna, czy odciążna, prócz namienionych są i te jeszcze sposoby, *1wszy:* Wziąć ilkość dwukrotną z niewiadomęj i wiadomęj złożoną, i podzielić przez nią dany pomiar, ta, byle bez reszty podzieliła, pokaze ścianę z przeciwnym znakiem, *np:* podzieliwszy przez $x-4$ pomiar: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, ponieważ podział bez reszty się udaje, pokazuje ścianę z przeciwnym znakiem to jest * 4 przeto, iż pomiary składane wypadają z mnożenia, a dzielenie mnożeniu jest prze-

przeciwnie. 2gi: Założywszy w pomierze danym za niewiadomą ilkość wiadomą jakąkolwiek, ieśli ta dla znaków przeciwnych zepsuje wszystkie jego terminy, będzie ścianą szukaną np: w pomierze: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ założywszy $+ 4$ za x , będzie $64 - 48 - 40 + 24 = 0$, 4 więc ieść ścianą tego pomiaru dodatnią.

Przeestroga. Sposoby te poznawania ścian sześciogrannych skrócić czasem mogą i zastąpić przydłuższe niżéy położone sposoby redukowania pomiarów wyższostopniowych, iako się da widzieć niżéy w rezolucyi i wszyskich zagadnień między przykładami pomiarów sześciogrannych.

§ XXI. Trafia się potrzeba zamienienia ścian rzetelnych w nierzetelne i przeciwnie, tudzież zwiększenia ich lub zmniejszenia inną jaką ilkością, co się tak dzieła: I. Odmieniwszy w składanym pomierze znaki terminów parzystych, to ieść 2go, 4tego *i t. d.* tém samém odmienione zostaną ściany rzetelne w nierzetelne i przeciwnie, np: w pomierze: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, gdzie, iako się pokazuje z samych znaków, przez § poprzedz: dwie są ściany rzetelne, a jedna nierzetelna, odmieniwszy znaki 2giego i 4tego terminu, żeby było: $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$, zamienią się i ściany w przeciwnie. II. Chcąc powiększyć tegoż samego pomiaru $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ wiadome ściany liczbą np: 3, robi

3, robi się prosty pomiar $x * 3 = y$, czyli $x = y - 3$, i zakłada się ta cena za x w danym pomiarze, wynosząc ją całą do tegoż stopnia, do którego x w każdym terminie danego pomiaru jest wyniesione, a stopnie te przez współczynnikiów téżże ilkości x mnożąc, będzie:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 - 9y^2 + 27y - 27, \\
 - 3x^2 & - 3y^2 + 18y - 27, \\
 - 10x & - 10y + 30, \\
 + 24 & + 24.
 \end{array}$$

$$Summa = y^3 - 12y^2 + 35y - 24 = 0.$$

Gdzie ściany danego pomiaru są zwiększone liczbą 3 tak, że które przedtém przez §. poprzedzający były $= 2 * 4 * 3$, stały się $= 5 * 7 * 0$, gdyż $* 3 = 3$ dla przeciwnych znaków $= 0$. Podobnie się dzieła zmniejszając ściany, byle liczba do zmniejszenia wzięta była z przeciwnym znakiem, czego przykład będzie niżej.

§ XXII. Odmiany terminów składających pomiar sześciogranny lub inny wyższostopniowy zależą albo na rugowaniu jakiego terminu z pomiaru, albo na wyśzukaniu go dla dopełnienia pomiaru i ułatwienia dalszégó jego redukcji. I. Rugować się z pomiaru składanego najczęściej zwykły termin 2gi, który gdy jest z znakiem $*$, wyruguje się i zgubi, zwiększwszy ściany pomiaru współczynnikiem tegoż samego terminu 2giego podzielonym

lonym przez wykładnika i wszego terminu, a gdy jest z znakiem —, wyruguje się zmniejszwszy ściany iego (przez §. poprzedz:) tymże i tak podzielonym współczynnikiem: Niech będzie np: pomiar $x^3 - 12x^2 + 44x - 4x = 0$, w którym rugując termin 2gi, dzielę iego współczynnika przez wykładnika terminu 1-wszego, będzie $\frac{12}{3} = 4$ wieloraz, którym dla znaku — zmniejszyć trzeba ściany danego pomiaru. Wziąwszy więc $x - 4 = y$, czyli $x = y + 4$, i założywszy za x tę cenę wyniesioną do iednych z nim stopniów w pomiarze danym przez § poprzedzający, będzie:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 + 12y^2 + 48y + 64. \\
 - 12x^2 & - 12y^2 - 96y - 192. \\
 + 44x & + 44y + 176. \\
 - 48 & - 48. \\
 \hline
 \text{Sum: bez 2go} & \\
 \text{terminu.} & = y^3 + 4y = 0 \text{ i t. d.}
 \end{array}$$

II. Do dopełnienia pomiaru sześciogrannego (co i wyższo-stopniowym służy) terminem 2gim dosyć jest, zwiększyć ściany iego ilkością wiadomą, tak np: chcąc dopełnić pomiaru $x^3 - 19x - 30 = 0$ terminem 2gim, którego tu brak, biorę $x + 1 = y$, czyli $x = y - 1$, i zakładam tę cenę za x w danym pomiarze, wynosząc ją do iednych z x stopniów, będzie:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 - 3y^2 * 3y - 1, \\
 \hline
 -19x & \qquad \qquad \qquad -19y * 19, \\
 -30 & \qquad \qquad \qquad -30. \\
 \hline
 \text{Sum: z term:} & \text{-----} \\
 \text{zgim:} & y^3 - 3y^2 - 16y - 12 = 0.
 \end{array}$$

§ XXIII. *O redukcji pomiarów
szczęściogrannych.*

Jeżeli się trafia w nich frakcye, te przed wyrugowaniem ieszcze terminu zgiego zgubić trzeba iednym z następujących sposobów, to jest: albo mnożąc niewiadomą danego pomiaru ścianę x przez produkt mianowników wszyttkich i cenę ię zakładając za nią w danym pomierze, albo z powszechnéy mianowników miary, ieśli się znajdzie, zrobiwszy progressyą Geometryczną zaczynającą się od 1, przez każdy termin téy progressyi mnożąc każdy odpowiadający termin pomiaru, a potém frakcye na całkowite obracając; np: gubiąc frakcye iwszym sposobem w tym pomie-

$$\text{rze: } x^3 - \frac{ax^2}{b} + \frac{a^2x}{c} - \frac{a^3}{b} = 0, \text{ mnożę}$$

ścianę pomiaru niewiadomą x przez bcd , a produkt $bcdx$ równam z inną niewiadomą ilkością np: y , żeby było: $bcdx = y$, czyli $x =$

$\frac{y}{bcd}$, i tę cenę zakładam w danym pomierze za x ,

wynosząc

wynosząc ją do iednychże z x stopniów, będzie:

$$\begin{array}{ccccccc}
 y^3 & & ay^2 & & a^2y & & a^3 \\
 \hline
 b^3c^3d^3 & & b^3c^2d^2 & & bc^2d & & d
 \end{array}
 = 0,$$

dopiero mnożę przez $b^3c^3d^3$ wszystkich liczników prócz iwlżego i frakcye na całkowite obracam, wypadnie pomiar bez frakcyi: $y^3 - acdy^2 + a^2b^2cd^2y - a^3b^3c^3d^2 = 0$. Gubiąc zaś drugim sposobem frakcye w tym np:

$$\text{pomierze: } y^3 - \frac{7y^2}{3} - 4y - \frac{32}{3} = 0, \text{ z 3 ią-}$$

ko powszechnéy mianowników miary robię progressyą 1. 3. 9. 27. i tak układam:

$$\begin{array}{ccccccc}
 7y^2 & & & & 32 & & \\
 y^3 - & \frac{\quad}{3} & - & 4y & - & \frac{\quad}{3} & = 0. \\
 1. & 3. & 9. & 27.
 \end{array}$$

toż przez każdy zosobna termin progressyi mnożę odpowiadający termin każdy pomiaru, i frakcye redukuję na całkowite, będzie: $y^3 - 7y^2 - 36y - 288 = 0$ i t. d.

§ XXIV. Po zgubieniu frakcyi i terminu zgo chcąc daléy redukować pomiar szesciogranny (co i o innych wyższych ma się rozumieć) doświadczyć naprzód inożna powszechnieyszych redukowania sposobów w § XVII. opisaných, a iezli z tamtych żaden się nie uda, trzeba dany pomiar obrócić do iednéy któręy z tych formuł:

$$x^3 * \text{---} px \text{---} q \text{---} o$$

$$x^3 * \text{---} px \text{---} q \text{---} o$$

$$x^3 * \text{---} px \text{---} q \text{---} o$$

które wyrażają wszelkie pomiary sześciogranne uwolnione od terminu zgo i pokazują ściany ich, bez których poznanie nie uczyni się redukcya. Ściany te z samych znaków położonych przed terminami formuł pokazują się. Jeśli wszystkie 3 są rzeczywiste (obacz wykład wyrazów w § XV.) muszą być dwie rzetelne, 3cia nie rzetelna równa tamtym obydwom, inaczej drugi termin nie byłby wyrugowany. Są zaś wszystkie 3 rzeczywiste, kiedy termin 3ci ma przed sobą znak —, czyli kiedy jest — p, iako w formule 1wżéy i 2giéy; są 2 rzetelne a 1 nierzetelna, kiedy ostatni termin jest z znakiem + czyli + q, iako w formule 1wżéy, są 2 imaginaryne, a 1 rzeczywista, kiedy jest ± q, iako się niżej pokaże w p. IV. Ciężéy trochę poznać: czy rzeczywiste ściany są sobie równe i które są równe sobie, tudzież czy jest iaka i która jest doskonała, a która niedoskonała. I. Ustawiając iednak te trudności i chcąc naprzód poznać równość ścian rzeczywistych, wziąć trzeba z którejkolwiek formuły terminy 3ci i ostatni, to jest: px i q, i zrobiwszy naprzód sześciogran z 3ciéy części współczynnika terminu zgo to jest z $\frac{1}{3}p$, potem czworogran z połowy terminu ostatniego czyli z $\frac{1}{2}q$, zrównać

wnać trzeba ieden z 2gim, a ieśli te będą sobie równe i ściany ich być muszą także równe. Niech będzie pomiar $np: x^3 - 12x + 16 = 0$, który mając ostatni termin z znakiem $+$, mieć powinien dwie ściany rzetelne a iedną nierzetelną; chcąc więc poznać: czy tamte są sobie równe, zakładam za terminy danego pomiaru terminy formuły iwszély, będzie: $p = 12$, $q = 16$; więc sześciogran z $\frac{1}{3}p$ będzie $\frac{1}{3}p^3$, a w liczbie biorąc $\frac{1}{3} = 4$; i wynosząc do 3go stopnia, będzie: 64, czworogran zaś z $\frac{1}{2}q$ będzie: $\frac{1}{4}q^2$, a w liczbie z $\frac{1}{2}$ czyli z 8 będzie 64; aże $64 = 64$, ściany więc danego pomiaru rzetelne obie są sobie równe, z których chcąc iedną wynaleść, dzielę trójkę ostatniego terminu przez dwójkę współczynnika terminu 3go, wieloraz po-

$$\frac{3q}{48}$$

kaze ścianę szukaną to ieść: $— = — = 2$.

$$\frac{2p}{24}$$

Ponieważ zaś dwie ściany rzetelne są sobie równe, toć kiedy iedna $= 2$, i 2ga musi być $= 2$, a 3cia nierzetelna tych summie równa musi być $= — 4$, iako się wyżej namieniło. II. Chcąc zaś poznać: czy ściana nierzetelna doskonałą ieść lub nie, odciągam ilkość p od czworogranu blisko większego, a przez resztę dzielę q , ieśli wieloraz ten będzie ścianą rzetelnego czworogranu, będzie ścianą doskonałą, inaczey będzie niedoskonałą. Daymy $np: x^3 - 39x + 70 = 0$ porównawszy te terminy

ny

ny z terminami formuły iwszcy, będzie:
 $p = 39$, $q = 70$, czworogran blisko wię-
 kszы od p czyli od 39 jest 49, od którego
 tamten odciągnąwszy (odmieniając znaki w ilko-
 ści odciążnéy podług Przep: Subtrakcyi) bę-
 dzie $49 - 39 = 10$, a przez tę resztę
 dzielę $q = 70$, wieloraz 7 równy ścianie
 czworogranu rzeczzonego pokazuje ścianę nie-
 rzetelną doskonałą. III. Chcąc nad to poznać:
 która z rzetelnych ścian jest doskonała, biorę
 czworogran blisko mniejszy od p i odciągam
 go od p , a przez resztę dzielę q , będzie li wie-
 loraz ścianą wziętego czworogranu, tém sa-
 mém będzie ścianą doskonałą; a jeżeli żaden
 taki nie znajdzie się czworogran, ściany będą
 niedoskonałe. Tak w przykładzie wyżey da-
 nym czworogran mniejszy od p czyli od 39
 jest 36, ten odciągniony od tamtego daje re-
 sztę 3, przez którą podzielone q czyli 70
 do wieloraz $23 \frac{1}{3}$, który nie jest ścianą rze-
 czzonego czworogranu, więc biorę jeszcze
 mniejszy czworogran 25, który odciągną-
 wszy od p , będzie $39 - 25 = 14$, a przez
 tę resztę podzieliwszy $q = 70$, wieloraz 5
 równy ścianie wziętego czworogranu będzie
 jedną z ścian doskonałych rzetelnych *i. t. d.*
 IV. Chcąc nakoniec poznać, które mię-
 dzy rzeczywistemi ścianami są imagina-
 ryjne, uważam 3ci termin w ogólnéy for-
 mule wyrażony przez p , który, kiedy ma
 przed sobą znak \times , dwie ściany pewnie bę-
 dą

dą imaginaryne równie iako i wtenczas, kiedy ma wprowadzić znak —, ale $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} q^2$, czyli gdy sześciogran z 3cię części terminu 2go mniejszy jest od czworogranu z połowy terminu ostatniego, a wtenczas albo ta będzie formuła: $x^3 * \mp px \mp q = 0$, albo ta: $x^3 - px \pm q = 0$. Będą także ściany imaginaryne, kiedy pomiar będzie czysty czyli bez 2go i 3go terminu zgodny z tą formułą: $x^3 * * * \text{ lub } -q = 0$.

§ XXV. O dokończeniu téżże redukcji.

Poznawszy przez poprzedzający §: że w pomiarze sześciogrannym po części już zredukowanym znajduje się między imaginarynymi choć jedna ściana rzeczywista doskonała lub niedoskonała, użyć można do dokończenia redukcji jego iednego z tych sposobów, które się w tym i następującym §. wyśfuszczą. A naprzód można wziąć czworogran blisko mniejszy lub większy od $\pm p$ czyli od terminu 3go (bierze się większy, gdy w danym pomiarze jest — p czyli gdy 3ci termin jest odciążny, mniejszy zaś, gdy jest * p) i odciągnawszy go od — p, jeśli się wziął większy, lub dodawszy do * p, jeśli mniejszy, przez resztę lub summę podzielić q czyli termin ostatni, wieloraz, będzie równy ścianie czworogranu wziętego, będzie ścianą rzeczywistą danego pomiaru, a ścianą doskonałą przez § po-

poprzedzający, którą dokończy redukcji, gdyż przy rostrzaniu warunków zagadnienia pokaże dorazu inne ściany w tymże pomierze zawarte, iako się da widzieć w następujących dwóch przykładach: I. Niech będzie pomiar: $x^3 - 1x + 6 = 0$ zgodny z formułą $x^3 + px + q = 0$, których porównawszy terminy, będzie: $p = -1$, $q = 6$, azatém, ponieważ $\frac{1}{27}p^3$ czyli sześciogran z 3cięy części współczynnika terminu 3go mnieyszy iest od $\frac{1}{4}q^2$ czyli od czworogranu połowy terminu ostatniego, gdyż $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$, a $\frac{1}{4}q^2 = 9$ przez wzmiankowany §, ściany być muszą dwie imaginaryne, 3cia rzeczywista, którey szukając biorę czworogran 4 blisko więkšzy od p czyli od terminu 3go (gdyż $-p = 1$) i odciągam go od $-p$ czyli -1 , odmieniwszy znaki, a przez resztę -3 dzielę $q = 6$, wieloraz, który iest ścianą wziętego czworogranu, będzie ścianą danego pomiaru rzeczywistą, odciążną wprawdzie, ale doskonałą $= 2$, która w rostrzaniu warunków pokaże inne imaginaryne *i t. d.*

II. Niech będzie dany ieszcze pomiar: $x^3 + 27x - 28 = 0$ zgodny z formułą $x^3 + px - q = 0$ przez $+p$ wyrażający dwie ściany imaginaryne, a 3cią rzeczywistą, którey szukając, biorę czworogran blisko mnieyszy 1, i dodaję go do $p = 27$, a przez sumnę $= 28$ dzielę $q = 28$, wieloraz $= 1$ iest ścianą wziętego czworogranu, azatém ścianą pomiaru rzeczywistą dodatną i doskonałą. *i t. d.*

§ XXVI. Drugi sposób znalezienia ściany rzeczywistey, azatém zredukowania pomiaru sześciogrannego iednę przynajmnięć ścianę doskonałą w sobie zawierającego iest ten: Mając np. pomiar: $x^3 + 12x = 427$, uważam: czy sześciogran ilkości niewiadomę x^3 mnieyszy iest od sześciogranu wiadomę 427, czy też więkwszy. I. Jeżeli mnieyszy, iaki iest w danym przykładzie (gdyż przeniósłszy $12x$ do zgięć części, będzie $x^3 = 427 - 12x$, więc kiedy x^3 wraz z $+ 12x$ wyrównywało ilkości 427, toć samo x^3 musi być od nięć mnieysze) wziąć trzeba sześciogran nieco mnieyszy od ilkości wiadomę 427 np: sześciogran 343, którego ściana $= 7$ i odciągnąć go od téżę ilkości wiadomę, odciągając razem i sześciolkości wiadomę x^3 od x^3 , z reszty $12x = 84$ wypadnie ściana doskonała $x = 7$ równa ścianie wziętego sześciogranu. Oto wzór tego działania:

$$\begin{array}{r} x^3 + 12x = 427 \\ - x^3 \quad \quad - 343 \\ \hline \quad \quad \quad = 12x = 84, \text{czyli } x = \frac{84}{12} = 7. \end{array}$$

II. Jeżeli zaś rzeczony sześciogran więkwszy iest od ilkości wiadomę w zgięć pomiaru części położonę, iaki iest w tym pomirze: $x^3 - 12x = 1584$ gdzie $x^3 > 1584$, bo $x^3 = 1584 + 12x$, wtenczas więkwszy od ilkości wiadomę 1584 bierze się sześciogran 1728, którego ściana $= 12$ i odciąga się tak ten sześciogran wzięty od rzeczonę ilkości,

iako

iało sześciogran niewiadoméy x^3 od x^3 , reszta, będąc ścianą sześciogranu wziętego, tém samém będzie ścianą pomiaru szukaną. Wzór działania:

$$\begin{array}{r} x^3 \text{ --- } 12x \text{ --- } 1584 \\ \text{--- } x^3 \qquad \qquad \text{--- } 1728 \text{ --- } 12x \text{ --- } 144. \end{array}$$

Przenosząc: $144 = 12x$, czyli: $x = \frac{144}{12} = 12$.

Przeestroga 1. Gdyby w przykładzie jakim sześciogran wzięty blisko mniejszy od ilkości wiadoméy i od niéy odciągniony nie dał reszty scianie swoiéy równéy, wtenczas bierze się ielżcze mniejszy *i t. d. np:* mając: $x^3 + 27x = 28$, a biorąc sześciogran 27 i odciągając od 28, reszta $= 1$ nie daje ściany 3 równéy ścianie wziętego sześciogranu, gdyż wychodzi na $x = \frac{1}{27}$, więc bierze się sześciogran ielżcze mniejszy 8 i odciąga się od 28, lecz i stąd reszta $x = \frac{20}{27}$ nie jest wziętego sześciogranu ścianą $= 2$; zaczém najmniejszy się bierze 1, który odciągniony od 28 da ścianę szukaną, gdyż będzie:

$$\begin{array}{r} x^3 + 27x = 28 \\ \text{--- } x^3 \qquad \qquad \text{--- } 1 \text{ --- } 27x = 27, \text{ czyli } x = \frac{27}{27} = 1. \end{array}$$

Przeestroga 2. Kiedy pomiar sześciogranny jest czysty wyrażony tą formułą: $x^3 + \dots + q = 0$, zawiera w sobie dwie ściany imaginaryyne, a iedną rzeczywistą $= x - \sqrt[3]{q} = 0$, przez którą znalezioną w liczbach podzieliwszy go zamieni się w czworogranny, o którego redukcji mówiło się w § XVIII.

PRZY-

PRZYKŁADY ZAGADNIEN

I redukcji pomiarów sześciogrannych.

Zagadnienie 1wsze toż samo prawie, które było ostatniem między przykładami Pomiarów czwórogrannych w § XVIII.

Ociec umierający zostawił Synowi swemu intraty roczney Cz: Zł: 200, z której Opiekun, odkładając corok po 100 na wychowanie dziecięcia, drugie 100 zaraz na początku 1wszego opieki roku dał na prowizyą, 2go zaś i 3ciego roku nie tylko rzeczzone 100 dał na tęż prowizyą, lecz i prowizye od niego regularnie odbierane. Po 3cim roku pokazało się zysku, który powiększył Sieroty intratę od Oyca zostawioną, Czerw: Złł: 33 $\frac{1}{10}$. Pytam, na jaką prowizyą wzmiankowane 100 Czerw: Zł: były dane?

Rezolucya Niech będzie prowizya niewiadoma od 100 $= \frac{100}{x}$ (czytaj Rezolucyą z przypiskiem wyżej na K. 119) będzie też prowizya

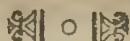
100 100 100
w 2gim roku: $\frac{100}{x} + \frac{100}{x^2}$, w 3cim: $\frac{100}{x} + \frac{100}{x^2} + \frac{100}{x^3}$

200 100
 $\frac{200}{x^2} + \frac{100}{x^3}$; azatém dodawszy te trzy-

letnie niewiadome prowizye i zrównawszy ie z wiadomym po trzech latach zyskiem, będzie pomiar sześciogranny:

K

100



$$\begin{array}{ccccccc}
 100 & 100 & 100 & 100 & 200 & 100 & \\
 \text{---} \times \text{---} & \times \text{---} & \times \text{---} & \times \text{---} & \times \text{---} & \times \text{---} & = 33 \times \frac{1}{10} \\
 x & x & x^2 & x & x^2 & x^3 & \\
 & & & & & & 300 \quad 300 \quad 100 \\
 \text{Czyli dodając terminy podobne: } & \text{---} \times \text{---} & \times \text{---} & & & & \\
 & x & x^2 & x^3 & & &
 \end{array}$$

$$= 33 \times \frac{1}{10}.$$

Skracając redukcją tego pomiaru, która przez inne sposoby byłaby i długa i trudna, wziąć można na domysł ścianę, iaka nayspodobniejsza do ułatwienia Zagadnienia tego zdawać się będzie, i w każdym terminie tegoż pomiaru założyć ją za x wyniesioną do jednego z niemi stopnia, a jeżeli po tém założeniu wypadnie iwsza część pomiaru doskonale równa zgięty, ściana wzięta będzie zapytaną prowizją, albowież przez § XX. p. V. przeniósłszy zgłą część pomiaru do iwszćy i zrównawszy ułożone porządnie terminy z 0, toż założy, wszy za x na domysł ścianę, iak pićrwey, jeżeli wszystkie terminy zepsują się, ściana wzięta będzie rzeczoną prowizją. I tak iwszym sposobem będzie:

$$\begin{array}{ccccccc}
 300 & 300 & 100 & & & & \\
 \text{---} \times \text{---} & \times \text{---} & & & & & = 33 \times \frac{1}{10} = 30 \times 3 \times \frac{1}{10} = 33 \times \frac{1}{10} \\
 10 & 100 & 1000 & & & &
 \end{array}$$

w 2gim będzie: $\frac{1}{10} \times 3 \times 30 = 33 \times \frac{1}{10} = 0.$

Jakoż jeżeli w iwszym roku od 100 prowizya: $\frac{100}{10} = 10$, będzie w 2gim: $\frac{100}{10} \times \frac{100}{100} = 10 \times 1$, a w 3cim: $\frac{100}{10} \times \frac{200}{100} \times \frac{100}{1000} = 10 \times 2 \times \frac{1}{10}$; co wlıyfsko uczyni: $33 \times \frac{1}{10}$. C. B. D. R.

Zagadnienie 2gie iwszemu podobne: Daje kto towarzystwu kupieckiemu na handel sum-
mę 1000 Cz: Zł: z warunkiem: żeby mu też
summa we trzy lata oddana była nie tylko
z prowizyą od kapitału, ale też z prowizyą
od samych prowizy, czyli, iak nazywają, z
lichwą. Przyjęty warunek, a summa we trzy
lata oddana pokazała się większą od daney
331 Cz: Zł. Pytam, na iaką od sta prowizyą
rzeczona summa była dana?

*Rezolucya naykrótsza też sama, co poprze-
dzającego Zagad*: Prowizya niewiadoma w

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1000 & & & 1000 & \\ & & x & & & x & \\ 1000 & & & 1000 & & 2000 & 1000 \\ \hline & & x^2 & & x & & x^2 & & x^3 \end{array}$$

a te prowizye w iednę summę zebrane i z o-
gólnym zylkiem zrównane dadzą pomiar:

$$\begin{array}{ccccccc} 3000 & & 3000 & & 1000 & & \\ \hline & x & & x^2 & & x^3 & \\ & & & & & & \end{array} = 331.$$

Zakładając w nim 10 za x, będzie: $\frac{3000}{10}$

$$\begin{array}{ccccccc} 3000 & & 1000 & & & & \\ \hline & 100 & & 1000 & & & \\ & & & & & & \end{array} = 331.$$

Redukując frakcye: $300 + 30 + 1 = 331$ i. t. d. C. B. D. R.

Zagadnienie 3cie toż samo, które było 9tém między czworogrannemi, ale tu do 380 stopnia po niesione. Lewny kapitalista dał Kupcowi do 3 lat sumę Cz: Zł: 10,000 na procent umówiony, po 3 leciech upłynionych gdy kupiec zbankrutował, cały majątek swój prawem przyciśniony oddać musiał kredytorom *in potioritatem*, skąd na wzmiankowanego kapitalistę nie przypadło tylko 7,210 Czer: Zł: Traci więc ogólnie na kapitale swoim 2,710 Czer: Zł: Pytam: ile na stu traci?

Rezolucya mogłaby być ta sama, co poprzedzających Zagadnień; ale postąpmy już od tego Mechanicznego do prawdziwie Algebraicznych rezolwowania sposobów trudniejszych wprawdzie i dłuższych, ale też nierównie pewniejszych. Założywszy za stratę nie wiadomą x , szukać iéy na każdy rok trzeba tak, iak wyżej w Rezolucyi tego samego Zagadnienia między przykładami czworogrannych; będzie po 1wżym roku rzeczona strata $= 100x$; po 2gim $= 100x +$

x^2 ; po 3cim $= 100x + 2x^2 + \frac{x^3}{100}$; a

te straty w jedną sumę zebrawszy i z ogólną stratą zrównawszy, wypadnie pomiar sześciogranny:

$$- 3000 + 3x^2 - \frac{x^3}{100} = -2710.$$

Czyli

Czyli przez § XVI: $\frac{x^3}{100} - 3x^2 + 300x$

$$- 2710 = 0.$$

Guhiąc frakcye, będzie: $x^3 - 300x^2 + 30000x - 271000 = 0.$

Rugując zaś termin 2gi przez § XXII, czyli zmniejszając ścianę pomiaru liczbą 100, będzie:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 + 300y^2 + 30000y + 1000000 \\ - 300x^2 & - 300y^2 - 60000y - 3000000 \\ + 30000x & + 30000y + 3000000 \\ - 271000 & - 271000. \end{array}$$

$$\text{Summa: } y^3 + 729000 = 0$$

Gdzie, ponieważ rugując 2gi termin, zginiął i 3ci, przeto pomiar szesciogranny zamienił się w czysty, dlatego pozostały termin jego ostatni z dwoma znakami położony, którego ściana znajdzie się przez Przestr: 2. §. XXV, wyciągając ją osobno z y^3 , a osobno z 729000, będzie przez § V. i XIII. $y = -90$. Ale, że rugując 2gi tego pomiaru termin, zmniejszyła się ściana jego liczbą 100, a dla wyrugowanego z 2gim razem i 3ciego terminu nie przyszło użyć innych sposobów redukowania tegoż pomiaru, a tém samém powiększenia ściany zmniejszonej, więc ją teraz powiększyć należy tą samą liczbą, którą przedtém była zmniejszona, będzie więc $y = -90 + 100 = 10$ i t. d.

Zaga-

Zagadnienie 4te. Mając daną summę dwóch sześciogranów i przewyżzkę boków czyli ścian, iak wynaleść same ściany?

Rezolucya 1. Niech będzie summa dwóch sześciogranów $\equiv 2a$, ściany niewiadome $\equiv 2x$, tych przewyżzka wiadoma $\equiv 2b$, będzie ściana większa: $x + b$, mnieysza: $x - b$, sześciograny z tych ścian pojedynczo zrobione i zebrane w iedną sumnę dadzą pomiar sześciogranu:

$$2x^3 + 6b^2x \equiv 2a.$$

Czyli przez § XVII, $x^3 + 3b^2x \equiv a.$

Czyli przez tenże §: $x^3 + 3b^2x - a \equiv 0.$

Daymy iuż: że $a \equiv 14$, $b \equiv 1$, założywszy te ceny za litery, zamieni się ostatni pomiar w ten: $x^3 + 3x - 14 \equiv 0$, który zgadza się z formułą $x^3 + px - q \equiv 0$; zrównawszy więc iego terminy z téy terminami, będzie $p \equiv 3$, $q \equiv 14$, a przez § XXV, wziąwszy czworogran 4 bliŹo większy od $p \equiv 3$ i ten do wziętego dodawszy będzie $4 + 3 \equiv 7$, przez które podzieliwszy $-q \equiv -14$, wieloraz -2 będzie ścianą wziętego czworogranu 4, a razem ścianą pomiaru szukaną, to iest będzie: $x - 2 \equiv 0$, czyli $x \equiv 2$. Więc podług warunków Zagadnienia ściana większa: $x + b \equiv 2 + 1 \equiv 3$, mnieysza zaś $x - b \equiv 2 - 1 \equiv 1$, sześciogran 1wŹy: $3 \times 3 \times 3 \equiv 27$, 2giy: $1 \times 1 \times 1 \equiv 1$, a summa sześciogranów $2a \equiv 28$. C. B. D. R.

Rezolucya 2. krótsza przez § XXVI. Mając zredukowany i do formuły obrocony pomiar:

$$x^3 +$$

$x^3 + 3x - 14 = 0$, szukam sześciogranu blisko mniejszego od 14, którym jest 8, i odciągamy go od 14, a razem odciągamy sześciogran ilkości niewiadoméy x^3 od x^3 , zostanie: $3x - 6 = 0$, czyli $x = \frac{6}{3} = 2$, iak wyżej.

Zagadnienie 5te. Mając daną sumę dwóch sześciogranów i prostokąt czyli rektangul z ich ścian zrobiony, iak znaleźć ściany danych obydwóch sześciogranów?

Rezolucya. Niech będzie sześciogranów summa $= 2a$, prostokąt z ścian zrobiony $= 2b$, ściana jedna $= x$, druga $= y$, wywdą z warunków zagadnienia te dwa pomiary:

$$\begin{aligned} 1\text{wszy} : x^3 + y^3 &= 2a. & 2b \\ 2\text{gi} : xy &= 2b, \text{czyli dzieląc: } y &= \frac{2b}{x}. \end{aligned}$$

Z których 2gi wynosząc do 3ciego stopnia,

będzie przez § II: $y^3 = \frac{8b^3}{x^3}$; tę zaś cenę za-

kładając za y^3 w pomierze 1wszym, będzie:

$$x^3 + \frac{8b^3}{x^3} = 2a; \text{ gdzie gubiąc frakcyą czy-}$$

li przez x^3 mnożąc 1wszy i ostatni pomiaru termin, będzie: $x^6 + 8b^3 = 2ax^3$, czyli $x^6 - 2ax^3 = -8b^3$. Ten iuż pomiar lubo zdaie się być sześciostopniowym, w saméy rzeczy nie jest tylko czworogrannym naciąganym przez § XVII. Wszakże założywszy w nim z

za x^3

za x^3 , zamieni się dorazu w ten czworogranny:
 $z^2 \text{ — } 2az \text{ — } 8b^3$. Dajmy już: że $2a \text{ — } 72$,
 $2b \text{ — } 8$, toć $b \text{ — } 4$; $b^3 \text{ — } 64$, $8b^3 \text{ — } 512$, więc zakładając liczby za litery, będzie
 pomiar: $z^2 \text{ — } 72z \text{ — } 512$, który redu-
 kując przez § XVIII. to jest: *naprzód* dopeń-
 jąc go przydatkiem do obydwóch części czwo-
 rogranu zrobionego z połowy współczynnika
 terminu $2go$, będzie:

$$z^2 \text{ — } 72z \text{ — } 1296 \text{ — } 512 \text{ — } 1296.$$

$$\text{Czyli: } z^2 \text{ — } 72z \text{ — } 1296 \text{ — } 784.$$

Powtóre: Wyciągając ścianę czworograną
 z 1wizę części przez § VI. z 2gię zaś przez
 § XI, będzie $z \text{ — } 36 \text{ — } 28$ czyli: $z \text{ — } 28$
 $\text{— } 36 \text{ — } 64$. Lecz z założone było za x^3 ,
 będzie więc $x \text{ — } \sqrt[3]{z} \text{ — } \sqrt[3]{64}$, albo ścianę
 wyciągnąwszy przez § XIII. $x \text{ — } 4$, a kiedy

$$x \text{ — } 4, \text{ toć } y \text{ — } \frac{x}{2b} \text{ — } \frac{4}{8} \text{ — } 2. \text{C. B. D. R.}$$

Zagadnienie 6ste: Mając dwie linije proste,
 pierwszą z nich tak pociągnąć, żeby drugiey
 czworogran do czworogranu części pociągnio-
 néy równy czyli ten sam względ miał, co
 część pociągnięta do caley prostey.

Rozłucza. Niech będą dane linije proste b
 i a , pociągnąwszy linię b , część pociągnio-
 na będzie $\text{— } x$, więc cała prosta $\text{— } b \text{ — } x$;
 azaćm podług warunków zagadnienia po-
 mier wypadnie w proporcji Geometryczney:
 $a^2. x^2 :: x. b \text{ — } x$.

Czyli

Czyli przez Zadan: 4. Rozdz: 3. Części 1.

$$x^3 = a^2b + a^2x.$$

Czyli przez § XVI: $x^3 - a^2x - a^2b = 0$.

Daymy już: że $a = 2$, $b = 12$, założy-
włży liczby za litery, pomiar zamieni się w ten:
 $x^3 - 4x - 48 = 0$; a ten zredukowałży
przez § XXV. albo XXVI, będzie: $x = 4$. Al-
bowiem redukując przez § XXV, biorę czwo-
rogran 16 większy od 4 współczynnika 2go
terminu, i odciągam 4 od 16, a przez resztę
12 dzielę — 48, wieloraz — 4 będąc ścianą
wziętego czworokranu, jest oraz ścianą pomia-
ru szukaną, więc $x - 4 = 0$, czyli $x = 4$.

Redukując zaś przez § XXVI. pomiar tak
obrócony $x^3 - 4x = 48$, ponieważ w nim
sześciogran niewiadomę ilkość x^3 większy jest
od sześciogranu wiadomę 48, więc wzięwszy
sześciogran 64 i odciągawszy go od 48, a
razem odciągawszy x^3 od x^3 , będzie:

$$\frac{x^3}{x^3} - \frac{4x}{64} = \frac{48}{64} = -\frac{4x}{64} = -\frac{16}{64} = x = \frac{16}{4} = 4.$$

Już jeżeli $x = 4$, toć $x + b = 4 + 12 = 16$; Więc iako: $a^2 \cdot x^2 :: x \cdot b + x$, tak też: $4 \cdot 16 :: 4 \cdot 12 + 4$. C. B. D. R.

Zagadnienie 7me. Wynaść trzy liczby Arytmetycznie równowzględne czyli proporcjonalne, których przewyżka, *differentia*, i miąższość, *solidum*, są dane.

Rezolucya. Przewyżsка trzech liczb wzmian-
kowanych niech będzie $\equiv d$, miąszość $\equiv m$,
liczby niewiadome i wfa $\equiv x$, zga $\equiv x + d$,
3cia \equiv

3cia $\equiv x + 2d$, gdyż Arytmetycznie mają być proporcjonalne ; miąższość zaś, mnożąc naprzód x przez $x + d$, potem produkt: $x^2 + dx$ przez $x + 2d$, będzie: $x^3 + 3x^2d + 2xd^2$, azatém pomiar:

$$x^3 + 3x^2d + 2xd^2 \equiv m.$$

Rugując termin 2gi przez § XXII. czyli biorąc $x \equiv y - d$ i cenę tę wyniesioną do jednychże z x stopniów zakładając za x w danym pomiarze, będzie:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & \equiv y^3 - 3y^2d + 3yd^2 - d^3 \\ + 3x^2d & \quad + 3y^2d - 6yd^2 + 3d^3 \\ + 2xd^2 & \quad \quad + 2yd^2 - 2d^3 \end{array}$$

$$\text{Summa: } y^3 \quad * \quad - \quad yd^2 \quad * \equiv m.$$

Daymy już: że $d \equiv 3$, $m \equiv 28$, założywszy te liczby za litery, będzie pomiar: $y^3 - 9y \equiv 28$, a ten łatwo się zredukuje przez § XXVI. Ponieważ bowiem $y^3 > 28$, biorąc więc 64 sześciogran większy od 28 i odciągając tamten od tego równie iako i y^3 od y^3 , a resztę redukując będzie:

$$\begin{array}{r} y^3 - 9y = 28 \\ - y^3 \quad - 64 = - 9y = - 36 = y = \frac{36}{9} = 4. \end{array}$$

Lecz $x \equiv y - d$, toć $x \equiv 4 - 3 \equiv 1$; gdy więc z liczb Arytmetycznie proporcjonalnych 1wsza iest 1, druga 4, toć przewyszka iest 3, azatém 3cia z tychże liczb będzie 7. Wszakże $1 \times 4 \times 7 \equiv 28$ C. B. D. R.

Za-

Zagadnienie 8me. Liczbę 10 podzielić na 4 części Geometrycznie proporcjonalne tak, żeby mnożąc 1wszą przez 8, 2gą przez 4, 3cią przez 3, 4tą przez 1, summa tych produktów uczyniła 16.

Rezolucya. Niech będzie liczby danéy część jedna $= x$, proporcyi zaś Geometrycznéy mianownik $= y$, będzie z 1wszego warunku zagadnienia pomiar: $x + xy + xy^2 + xy^3 = 10$,

Z 2go zaś warunku będzie 2gi pomiar: $8x + 4xy + 3xy^2 + xy^3 = 16$.

W obudwóch wzięwszy cenę ilkości x , bę-

10

działając w 1wszym: $x = \frac{10}{1 + y + y^2 + y^3}$, w 2gim:

16

$x = \frac{16}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$; a te ceny przez §XVII.

zrównawszy z sobą czyli ułożywszy w jeden pomiar, będzie:

10 $= \frac{16}{16 + 16y + 16y^2 + 16y^3}$

$1 + y + y^2 + y^3 = 8 + 4y + 3y^2 + y^3$.

Gubiąc frakcye, to jest: przez mianownika 1wszém mnożąc licznika 2giém i naodwrot przez 2giém mianownika mnożąc licznika 1wszém

$16 + 16y + 16y^2 + 16y^3$

będzie naprzód: $10 = \frac{16 + 16y + 16y^2 + 16y^3}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$

$8 + 4y + 3y^2 + y^3$

Powtóre: $80 + 40y + 30y^2 + 10y^3 =$

$16 + 16y + 16y^2 + 16y^3$.

Czyli

Czyli przez § XVI. $16y^3 + 16y^2 + 16y + 16 - 10y^3 - 30y^2 - 40y - 80 = 0$. Redukując zaś terminy podobne, zostanie: $6y^3 - 14y^2 - 24y - 64 = 0$. Dzieląc przez 6, będzie: $y^3 - \frac{14}{3}y^2 - 4y - \frac{64}{3} = 0$, czyli: $y^3 - 7y^2 - 4y - \frac{32}{3} = 0$.

Gubiąc frakcye przez § XXIII. sposobem 2gim, będzie:

$$y^3 - 7y^2 - 4y - \frac{32}{3} = 0$$

$$1. \quad 3. \quad 9. \quad 27.$$

$$y^3 - 7y^2 - 36y - 288 = 0$$

A ten pomiar ponieważ da się podzielić bez reszty przez $y - 12$ (§ XVII p. V.) wypadnie z podziału takiego pomiar czworogranny: $y^2 + 5y + 24 = 0$, więc 12 z przeciwnym znakiem jest ścianą pomiaru sześciogrannego przez § XX. p. V. Lecz że dla zgubienia frakcyi ściana tegoż pomiaru rozmnożona była przez progresyą Geometryczną mającą za mianownika 3 , zaczęm i ściana wynaleziona 12 jest we troje większa od ściany prawdziwéy tegoż pomiaru, przeto podzielić ją należy przez 3 , wieloraz da ścianę dotąd szukaną $= 4$, którą założywszy za x w cenie iego którykolwiek ze dwóch wyżej położonych, wypadnie część 1wsza liczby 10 zapytana, gdyż

10

będzie: Jak w 1wszém: $x = \frac{10}{1 + 4 + 16 + 64}$

$1 + 4 + 16 + 64$.

$$= \frac{10}{81} = \frac{2}{17}$$

Tak

Tak i w zgięty $x = \frac{\quad}{8 * 16 * 48 * 64}$

$$= \frac{16}{17} = \frac{2}{17}$$

Część tedy iwsza rzeczony liczby $= \frac{2}{17}$,
więc 2ga $= \frac{8}{17}$, 3cia zaś $= \frac{32}{17}$, nakoniec
4ta $= \frac{128}{17}$, gdyż $\frac{2}{17} \times 4 = \frac{8}{17}$, $\frac{8}{17} \times 4 = \frac{32}{17}$,
 $\frac{32}{17} \times 4 = \frac{128}{17}$, a tych części summa $\frac{170}{17} = 10$.

Gdyby zaś każda z tych części rozinuożona
była przez liczby warowane, summa produ-
któw z mnożenia tego wypadłych byłaby $=$
16, gdyżby było: $\frac{2}{17} \times 8 = \frac{16}{17}$; $\frac{8}{17} \times 4 = \frac{32}{17}$;
 $\frac{32}{17} \times 3 = \frac{96}{17}$; $\frac{128}{17} \times 1 = \frac{128}{17}$; a summa:
 $\frac{272}{17} = 16$. C. B. D. R.

ROZDZIAŁ VII.

O Rachunku ściennym czyli Radykalnym.

Z tego, co się dotąd przekładało, można
dochodzić, co to jest zarachunek i do cze-
go przydatny. Ale jego zdatność okaże się le-
piej w Rozdziale ostatnim, dla której przed
nim się kładzie, bo dla innych bezpiecznie
mógłby być opuszczony; dlaczego treść
tylko jego i przednieysze działania iak nay-
króćey będą tu dotknięte.

§ XXVII. *Rachunek ten bawi się około stopniów
niedoskonałych, o których wiedzieć potrzeba:*

I. Ze niedoskonałym stopniem, *potentia im-
perfecta, surda, irrationalis*, nazywa się il-
kość

kość, z której ściany całe wyciągnąć nie można, i od znaku też ścianę wyrażającego nazywa się ściennym czyli radykalnym, a wyraża się jednym z tych sposobów: $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a-b}$, $\sqrt[4]{(a-b)}$; gdzie znak każdy ścienny albo wyraźnego ma wykładnika 3, 4 i t. d. albo domniemanego 2, iako \sqrt{a} , które to wykładniki w porównywaniu ilkości ściennych jednych z drugimi nazywają się mianownikami ich, o czém w § następującym.

II. Liczba lub litera przed znakiem ściennym położona nazywa się przedznaczną, *extra signum*, iaką jest 2 w ilkości ściennéj: $2\sqrt[3]{3}$,

a w ilkości: $a\sqrt[4]{b}$, a gdzie wyraźny nie masz, tam domniemaną będzie 1. Ilkość zaś pod tymże znakiem położona, nazywa się podznaczną, *sub signo*, iako 3 i b w danych przykładach. Zeby przedznaczną ilkość położyć się mogła pod znakiem, wynieść się powinna do tego stopnia, który wyrażony jest przez wykładnika ściennego, i rozmnożyć się przez ilkość podznaczną; tak np: $2\sqrt[3]{3}$, będzie:

$2 \times 2 \times 2 = 8 \times 3 = \sqrt[3]{24}$. Ilkość zaś podznaczną jednego z znakiem ściennym wykładnika mająca nie może się inaczej przed znakiem położyć tylko wyciągnawszy z niej ścianę; ta się położy przed znakiem ściennym, a reszta zostanie pod nim; tak $\sqrt[3]{ab^3}$ będzie: $b\sqrt[3]{a}$, i t. d.

III. Ilkość odciążna położona pod znakiem ściennym, którego wykładnikiem jest liczba parzysta np: $ta : \sqrt[2]{\quad} a$, lub $ta : \sqrt[4]{\quad} a$, nazywa się imaginaryyną czyli niepodobną, gdyż niepodobna jest z tych stopniów ścianę wyciągnąć, iako się namieniło w Przestr. 2. § XV.

IV. Dwie ilkości ściennie nazywają się współmiernemi czyli mogącemi się pomierzyć, *commensurabiles*, które pod iednakiem znakiem ściennym mają też samą literę albo liczbę, i przedznaczniemi się tylko różnią, takie są: $3\sqrt[5]{\quad}$ i $2\sqrt[5]{\quad}$, $a\sqrt[3]{\quad} b$, i $c\sqrt[3]{\quad} b$ i t. d.

§ XXVIII. Jak ściennie ilkości obrócić do iednego mianownika ?

Ponieważ tych ilkości ani dodawać, ani odciągać, ani nawet mnożyć i dzielić nie można, iesli tego samego mianownika czyli wykładnika ściany nie mają, przeto, gdy są dane z różnym mianownikiem, do iednego ie obrócić trzeba, zostawując ilkości przedznaczne, iak były, a te tylko, które są pod znakiem, redukując iednym ze dwóch sposobów :

I. Mając np: $\sqrt[3]{\quad} a$ i $\sqrt[3]{\quad} b$, czyli (przez Wykład III. Rozdz: I.) $a^{\frac{1}{3}}$ i $b^{\frac{1}{3}}$, trzeba *naprzód*: wykładników tych śomanych $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ obrócić do iednego mianownika podług Reguły Arytmet: będzie: $\frac{3}{2}$ i $\frac{2}{3}$; *ponwtóre* : wynieść ilkość a do 3go, b zaś do 2go stopnia, iak te nowe wykładniki same pokazują, toż wyniesione a^3 , b^2 pod znakiem ściennym położyć, a w znaku samym

mym iednegoż ich mianownika 6, będą ilko-
ści rzeczone obrócone do iednego mianownika

$$\sqrt[6]{a^3} \text{ i } \sqrt[6]{b^2}$$

II. Jeżeli wykładnik iednéy ściany bez re-
zty dzieli 2go, ilko ci ściennie krócéy się o-
bróćą do iednego mianownika *np:* mając:

$\sqrt[2]{c}$ i $\sqrt[6]{a}$, ponieważ 6 przez 2 spełna się dzieli,
więc podzielivszv, wieloraz 3 pokaże naprzed:
że ilkość pod 1wszym znakiem położona, wy-
nieść się powinna do 3ciego stopnia c^3 , potem: że
wykładnik iéy 2 przez toż 3 rozmnożony bę-
dzie wykładnikiem czyli mianownikiem wspol-
nym obojéy ściany, azatém będzie: $\sqrt[6]{c^3} \pm \sqrt[6]{a}$
i t. d.

§ XXIX. *Ilkości ściennie iak się redukują, czyli na prostsze obracają?*

Uważać trzeba: co za mnożyciele są ilko-
ści pod znakiem ściennym położonych, z tych
będzieli który wyniesiony do tego samego sto-
pnia, który iest w znaku ściennym, wycią-
gnioną z niego ścianę położyć przed znakiem,
a resztę zostawić na swoiém mieytku. Niech

będzie *np:* ilkość $\sqrt[n]{a^m b^n}$, któręy ilkości pod-
znaczone a^m , b^n są dwa mnożyciele, *factores*,
z których rozmnożenia wypadł produkt $a^m b^n$;
z tych 2gi b^n pojedynczo wzięty iednegoż ma
wykładnika z znakiem ściennym; wyciągną-
włzy

wszy więc z bⁿ ścianę czworogranną b i przed
znakiem położywszy, a resztę to jest a^m zos-
tawivszy pod znakiem, będzie: $b \sqrt[n]{a^m}$ ilkość
zredukowana czyli na prostszą obrócona.

Niech będzie ieszcze ilkość ścienna w liczbie
np: $\sqrt[3]{24}$, który mnożyciele są 8 i 3, a z tych
iwszy jest tym samym stopniem, który wyraża
 $\sqrt[5]{}$; wyciągnąwszy więc z 8 ścianę sześciogran-
ną 2 i przed znakiem położywszy, a 2giego
mnożyciela 3 zostawivszy pod znakiem, będzie:
 $2 \sqrt[3]{3}$ na prostszą obrócona, ale téż saméy
ceny, co i iwsza i t. d.

Przestroga. Mnożycielów wzmiankowanych
nie trudno znaleźć, dzieląc liczbę podznaną
przez 2, 3, 4 i t. d. Który bowiem dzielnik rze-
czoną liczbę bez reszty podzieli, ten będzie ie-
dnym mnożycielem, a wieloraz drugim. Lecz
który ilkości znaleźć nie można mnożycielów
takich, żeby ieden z nich wyniesiony był do
stopnia przez znak ścienny wyrażonego; ta
nie może się na prostszą obrócić. Co żeby tym
łatwiey poznać, zrobić trzeba z ilkości pod-
znacznych frakcyą, ta zredukowana pokaże
mnożycielów np: mając $\sqrt[3]{8}$ i $\sqrt[3]{18}$, a 8 i 18
obracając na $\frac{8}{18}$, czyli na $\frac{4}{9}$; będzie 4 iednym,
a 9 drugim mnożycielem, a obadwa czworo-
grannemi, iako oczywista.

§ XXX. Dodawanie i odciąganie ilkości ściennych.

Obróciwszy ilkości ścienne na prostsze przez §. poprzedz: uważać należy : czy są współmierne, czy nie.

I. Jeżeli są współmierne czyli też samą ilkość podznaczną mające, ta się na swoim miejscu zostawuje, a przedznaczną dodaje się lub odciąga sposobem zwyczajnym, i summa lub reszta kładzie się znowu przed znakiem ściennym np: mając $\sqrt{50}$ i $\sqrt{18}$, i redukując na prostsze, będą: $5\sqrt{2}$ i $3\sqrt{2}$, dodając $5+3$, będzie summa $= 8\sqrt{2}$, odciągając $5-3$, będzie reszta $= 2\sqrt{2}$.

II. Jeżeli zaś nie są współmierne, dodanie ich i odciągnięcie zwyczajnymi znakami $+$ i $-$ wyraża się. Dwa te przepisy służą składanym nawet ilkościom ściennym. Co się daje widzieć w tym przykładzie, w którym terminy ścienne dodają się jednoznaczne, a różnoznaczne odciągają.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{6}. \\ 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{5} + \sqrt{6}. \\ \hline 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{6}. \end{array}$$

§ XXXI. Mnożenie i dzielenie tychże ilkości.

I. Obrócone do jednego mianownika przez § XXVIII. ilkości ścienne ośobno przedznaczone a ośobno podznaczone mnożą się za wzór pospolitych, a produkta piszą się z tymże samym znakiem ściennym tak, iak mnożyciele
były

były napisane np: mnożąc $5\sqrt[3]{3}$ przez $4\sqrt[3]{2}$,
 będzie: $5 \times 4 = 20$, $3 \times 2 = 6$, zatem
 produkt $= 20\sqrt[3]{6}$; podobnym sposobem mno-
 żąc $m\sqrt[3]{a}$ przez $n\sqrt[3]{a}$, będzie: $mn\sqrt[3]{a^2}$. Kie-
 dy zaś trafi się ilkość ścienną mnożyć przez
 doskonałą, trzeba tę wprzód do iednego z tam-
 tą mianownika obrócić, a dopiero mnożyć,
 iak wyżej. Zgoła byle iednego mianownika
 miały rzeczone ilkości czy pojedyncze, czy
 składane z samych ściennych lub częścią z ścien-
 nych, częścią doskonałych terminów; do mno-
 żenia onych dosyć na tym przepisie: aby się
 zosobna mnożyły doskonałe przez doskonałe,
 a ścienne przez sobie podobne, pamiętając o
 regułach w Części I. na znaki $++$ i $--$ da-
 nych, dla których terminy podobne płowac się
 zwykły, a w terminach produktu redukcją
 czyniąc, gdzie można przez §. XXIX.

II. Co się tycze dzielenia, uważać trzeba
 ilkości ścienné czy są współmierne, czy nie.
 Sąli współmierne, podzieliwszy przedznaczone,
 wieloraz da ilkość doskonałą, tak np: $6\sqrt[3]{3}$
 dzieląc przez $3\sqrt[3]{3}$, wieloraz będzie $= 2$. Al-
 bowiem dwie te przedznaczone ilkości 6 i 3
 kładąc pod znakiem przez § XXVI. p. II. bę-
 dzie iwsza: $6\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{108}$, 2ga: $3\sqrt[3]{3} =$
 $\sqrt[3]{27}$; dzieląc zaś $\sqrt[3]{108}$ przez $\sqrt[3]{27}$, czyli
 $\frac{108}{27}$, wieloraz będzie: $\sqrt[3]{4} = 2$. Jeżeli zaś
 nie są współmierne, tedy osobno dzielą się
 przedznaczone, osobno podznaczone, np: $6\sqrt[3]{ab}$

Ła odla dzieląc

dzieląc przez $2\sqrt{a}$, będzie: $\frac{a}{2}$ i $\frac{ab}{a} = 3\sqrt{b}$.

Naostatek: chcąc dzielić ilkość ścienną przez doskonałą lub przeciwnie, obrócić wprzód trzeba doskonałą do iednego mianownika z ścienną, dopiero dzielić podług danych przepisów np: chcąc podzielić a przez $\sqrt[3]{ab}$, wynoszę a do 3go stopnia, będzie: $\sqrt[3]{a^3}$, toż dzielę a^3 przez ab , wypadnie wieloraz $= \frac{aa}{b}$.

Okazanie ogólnego sposobu mnożenia i dzielenia.

I. Mnożąc ilkość ścienną np: $\sqrt{3}$ przez $\sqrt{2}$, produkt musi być $= \sqrt{6}$. Albowiem z istoty mnożenia i tak się ma do liczby mnożący, iak mnożna do produktu, który nazywam p , to jest: w przykładzie danym: $1.\sqrt{2} :: \sqrt{3}.p$. taż proporcya jest i między czworogranami tych samych terminów to jest: $1.2 :: 3.p^2$. A że $1.2 :: 3.6$; więc iak $p^2 = 6$, tak i $p = \sqrt{6}$. Dzieląc zaś np: $\sqrt{15}$ przez $\sqrt{3}$, wielorazem być musi $\sqrt{5}$; gdyż z istoty dzielenia tak się ma dzielnik do liczby podzielny, iak 1 do wieloraza, który niech będzie $= q$, co także i czworogranom służy, to jest: iako $\sqrt{3}.\sqrt{15} :: 1.q$. tak: $3.15 :: 1.q^2$. A że $3.15 :: 1.5$. więc iak $q^2 = 5$, tak i $q = \sqrt{5}$. C.B.D.O.

§. XXXII. *Wynieść ilkość ścienną do danego stopnia.*

I. Ilkość ścienna mająca się wynieść do danego stopnia albo jest podznaczna, albo częścią

ścią przedznaczną częścią podznaczną ; jeżeli tylko podznaczną , sama się do stopnia danego wynosi bez odmiany znaku ściennego i iego wykładnika np: $\sqrt[3]{a}$ wyniesiona do 3go stopnia będzie $\sqrt[3]{a^3}$, jeżeli zaś częścią przedznaczną , częścią podznaczną , tak ta iako i tamta do danego stopnia wynieść się powinna np: $a\sqrt[3]{b}$ wyniesiona do 2go stopnia będzie $a^2\sqrt[3]{b^2}$. II. Co się tycze ilkości ściennych składanych , te się wynoszą do wyższych stopniów tak , iak doskonałe , zachowując Przepisy na mnożenie dane w §. poprzedzającym i t. d.

§ XXXIII. Wyciągnąć ścianę czworogranną z ilkości ściennéy.

I. Wyciągać ścianę z ilkości ściennych wyższą nad 2gi i 3ci stopień nie zdarza się z przy czyny : że ilkości wyższe nad rzeczzone stopnie w redukcji pomiarów do 2go pospolicie albo do 3go stopnia obracają się , przeto z tych tylko stopniów ścian wyciągania potrzeba czasem wynika. Co się więc tycze czworogrannéy , mając ją wyciągnąć np: z \sqrt{a} , ponieważ przez § I. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, wykładnika tego $\frac{1}{2}$, podzieliwszy przez wykładnika stopnia danego także $\frac{1}{2}$, wieloraz da ścianę czworogranną : $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; azatém , ponieważ ułamki dzielą się przez mnożenie , do wyciągnięcia ściany takiéy dosyć bę-

będzie przez wykładnika ściany danéy rozmnożyć wykładnika ilkości ściennéy.

II. Mając wyciągać też ścianę z ilkości dwukrotnéy np: z téy : $7 + \sqrt{48}$, odciąga się naprzód 48 od 49 to jest : od czworógranu 1-wszego terminu 7, potem z przewyżki ich $= 1$ wyciąga się ściana czworogranna $= 1$, a ta dodana do terminu doskonałego 7 uczyni 8, odciągnięta od niego, uczyni 6; którétó summy i przewyżki połowa to jest : 4 i 3 będzie ścianą czworogranną danéy dwukrotnéy ilkości $= \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$. Podobnie wyciągając też ścianę z ilkości dwukrotnéy : $a + b - 2\sqrt{ab}$, odciąga się od czworógranu 1-wszego terminu $a + b$, to jest : od $a^2 + 2ab + b^2$ czworógran terminu 2go $= 2\sqrt{ab}$ to jest : $4ab$ przez § XXVII. p. II; będzie przewyżka : $a^2 - 2ab + b^2$, którétó ściana czworogranna jest : $a - b$, tę dodawszy do terminu doskonałego $a + b$, będzie summa $2a$, odciągnąwszy od niego, będzie reszta $2b$; a połowa téy summy i reszty będzie ścianą szukaną $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Okazanie. Biorąc za przykład dopięro znalezioną ścianę $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ i wynosząc ją do 2go stopnia przez § przedostatni, będzie : $a + b - 2\sqrt{ab}$ ilkość dwukrotna, która dana była, w którétó dają się widzieć dwa terminy doskonały i ścienny, 1wszy zawierający sumę ścian $a + b$, 2gi dwójsty produkt tychże ścian $2\sqrt{ab}$. Odciągnąwszy więc czworógran

zgo terminu $= 4ab$ od czworogranu i wśzego terminu doskonałego $= a^2 - 2ab + b^2$, reszta $= a^2 - 2ab + b^2$ będzie także czworogranem ściany $a - b$, więc przewyżką tych dwóch czworogranów jest $a - b$, która dodana do ich summy $a + b$ uczyni za to jest: dwójkę czworogranu ściany \sqrt{a} , odciągnięta zaś od téżże summy uczyni $2b$ czyli dwójkę czworogranu zgięty ściany \sqrt{b} , azatém połowy ich a i b dają terminy ściany szukanej $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ C. B. D. O. Skąd się pokazuje: iż do wyciągnięcia ściany czworogrannej z dwukrotnéj ilkości ściennéj trzech warunków potrzeba I. żeby rzeczona ilkość nie z samych terminów ściennych składała się, ale żeby jeden z nich był doskonały, II. żeby termin doskonały azatém i czworogran jego był większy od ściennego, iżby się ten od tamtego mógł odciągnąć, III. żeby przewyżka czworogranów zrobionych z terminów doskonałego i ściennego była także czworogranem, inaczej z danéj ilkości nie wyciągnie się ściana czworogranna.

§ XXXIV. *Wyciągnąć ścianę sześciograną z ilkości ściennéj trzeciostopniowéj.*

Redukcyę pomiarów sześciogrannych i innych wyższostopniowych na sześciogrannę obrotnych kończą się pospolicie na wyciąganiu tym lub owym sposobem ściany, ale nie także sześciogranny pomiar zredukowany do
jednéj

jednėy niewiadomėy ilkości ma w drugiėy części swojėy wiadome zupełnie zredukowane. Bywa tam czasem ieden, a czasem i drugi termin ścienny, który dalszego ciągnienia ściany potrzebuje. Obaczmy więc, iak z niemi postąpić.

I. Weźmy np: zredukowanego iakiego pomiaru sześciogrannego część $2ga = 20 + \sqrt{392}$, gdzie dwa są terminy, ieden doskonały to jest: 20, drugi ścienny to jest: $\sqrt{392}$, który obrócić trzeba na prostszy, czyli wyciągnąć z niego, co jest doskonałego i przed znakiem położyć, resztę, ieżli będzie iaka, zostawując pod znakiem. Co się tym sposobem dzieła: Mnożyciele liczby ściennėy 392 między innemi są 2 i 196, (gdyż podzieliwszy 392 przez 2, wieloraz jest 196) liczba zaś ta 196 jest czworogranna, którėy ściana jest $= 14$, azatém przez § XXIX: $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$. Będzie więc dana ilkość dwukrotna: $20 + \sqrt{392} = 20 + 14\sqrt{2}$, z którėy wyciągając ścianę sześciogranną, daymy: że część doskonała $20 = a$, niedoskonała $14\sqrt{2} = m\sqrt{c}$, będzie cała ściana $= a + m\sqrt{c}$, a sześciogran z niėy uczyniony przez § XXXII. p. II. będzie: $a^3 + 3a^2m\sqrt{c} + 3am^2c + m^3c\sqrt{c}$, którego część doskonała jest: $a^3 + 3am^2c$, niedoskonała zaś $3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c}$. Ze zaś $\sqrt{c} = \sqrt{2}$, obróciwszy na liczbę, będzie: $3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c} = 3a^2m\sqrt{2} + m^32\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$, czyli część

ta

ta niedoskonała literami wyrażona równa sobie saméy liczbami wyrażonéy. Daymy iuż: że $m = 1$, i przez $\sqrt{2}$ podzielmy: $3a^2m\sqrt{2} \ast m^32\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$, będzie: $3a^2 \ast 2 = 14$, czyli: $3a^2 = 14 - 2 = 12$, czyli: $a^2 = \frac{12}{3} = 4$, czyli na koniec, wyciągnąwszy ścianę czworograną: $a = 2$, a tę cenę założywszy w części pomiaru doskonałéy za a , będzie: $a^3 \ast 3am^2c = 8 \ast 12 = 20$. Co się dobrze zgadza z przedsięwziętym przykładem, którego część doskonała $= 20$, a że cała iego ściana wyżéy należona $= a \ast m\sqrt{c}$, a zaś $= 2$, $m = 1$, $\sqrt{c} = \sqrt{2}$, więc ściana $= 2 \ast 1\sqrt{2}$, czyli: $2 \ast \sqrt{2}$. II. Niech będą w zredukowanym pomierze dwa terminy ściennie: $\sqrt{243} \ast \sqrt{242}$, które redukując przez § XXIX, będzie iwfzy: $9\sqrt{3}$, gdyż z mnożycielów liczby 243 ieden być może 3 niedoskonały i dla tego pod znakiem ściennym położony, drugi 81 doskonały, który iest czworogranem, dlatego ściana iego 9 położona przed znakiem, drugi zaś będzie: $11\sqrt{2}$, gdyż z mnożycielów liczby 242 ieden 2 niedoskonały, drugi 121 czworogranny, którego ściana 11. Dla ułatwienia dalszéy redukcyi założywszy litery za liczby, będzie: $9\sqrt{3} = m\sqrt{c}$, $11\sqrt{2} = n\sqrt{d}$, azatém cała ściana $= m\sqrt{c} \ast n\sqrt{d}$, a sześciogran iéy przez § poprzedzający będzie:

$$m^3c\sqrt{c} + 3m^2nc\sqrt{d} + 3mn^2d\sqrt{c} + n^3d\sqrt{d}.$$

A że $m\sqrt{c} = 9\sqrt{3}$, będzie więc część iedna sześciogranu tego $m^3c\sqrt{c} + 3mn^2d\sqrt{c} = 3m^3\sqrt{3} + 6mn^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Daymy już, że $m = 1$ i podzielmy tę część przez $\sqrt{3}$ będzie: $3 + 6n^2 = 9$, czyli: $6n^2 = 9 - 3 = 6$, czyli: $n^2 = \frac{6}{6} = 1$, czyli na-ostatek wyciągnąwszy ścianę: $n = 1$, a tę część założmy za n w 2gię część, będzie: $3m^2nc\sqrt{d} + n^3d\sqrt{d} = 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$. Co się dobrze zgadza z założeniem, azatém ściana wyciągnięta: $m\sqrt{c} + n\sqrt{d} = 1\sqrt{3} + 1\sqrt{2}$, czyli $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ i t. d.

R O Z D Z I A Ł VIII.

O Pomiarach Czwartostopniowych.

§. XXXV. *Jak się redukują Pomiaru dwuczworogrannne czyli czwartostopniowe?*

Następujące zachowując Przepisy:

Przepis 1. Uważać dobrze potrzeba najpierw: czy pomiar z warunków zagadnienia wypadły iest prawdziwie czwartostopniowy, czy nie raczey czworogranny naciągany. Poznać to można iednym z tych sposobów: 1mŝy iest w § XVIII. opisaný, 2gi: probując: czy się z niego nie da wyciągnąć ściana czworogranna, a ta byłaby pomiarem także czworogrannym,

grannym, czego wzór będzie w Rezolucyi Zagadn: 1 i 2. niżej, 3ci: rezolwując pomiar czwartośtopniowy na dwa Czworogranne, czego wizerunek iasny da się w Rezolucyi zagadnienia 3ciego.

Przepis 2. Jeżeli zaś żadnym z wytkniętych w Przep: 1. sposobów pomiar czwartośtopniowy nie da się obrócić na czworogranny, trzeba zacząć redukcją iego od zgubienia frakcyy, jeżeli są iakie, i od wyrugowania z niego terminu 2go; w czém oboygę trudności nie masz, zachowując to, co się w § XXIII. i XXIV. przepisało. Potém obracać pomiar czwartośtopniowy na sześciogranny, co dłuższyć roboty wyciąga, do której trzeba mieć formułę ogólną przygotowaną, która się tak sporządza: wziąwszy pomiar ogólny wszelkie Czwartośtopniowe bez 2go terminu wyrażający: $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, obracam na sześciogranny ogólny, za któregooby pomocą inne iżczególne czwartośtopniowe mogły się redukowac, rozbierając go na dwa czworogranne, które składającemi odtąd nazywać będę, to jest: na $x^2 + yx + f = 0$, i na $x^2 - yx + g = 0$; toż mnożę ieden przez 2gi, wypadnie inny pomiar wziętemu równy:

$$\begin{aligned} x^4 + fx^2 - fyx + fg \\ + gx^2 + gyx - y^2x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Gdzie termin 2gi dla przeciwnych znaków zgubiony. Porównywając iuż współczynniki termi-

terminów tego pomiaru z współczynnikami
wziętego na formułę, będzie I. $f + g - y^2$
 $= p$, II. $gy - fy = q$, III. $fg = r$, a
z 1wżych dwóch pomia ów robiąc inny, w któ-
rymby iedna tylko niewiadoma była to jest ta,
która w obydwóch składających jest współczyn-
nikiem, terminu zgo , iaka tu jest ilkość y ;
naprzód: w 1wszym przeniósłszy $-y^2$ do 2-
giey części, mnożę przez y wszystkie terminy,
będzie: $fy + gy = py + y^3$, w 2gim zaś
mam: $gy - fy = q$, więc gdy te obydwa
dodam, będzie summa: $2gy = py + y^3 + q$.
gdy ie odciągnę, będzie reszta: $2fy = py + y^3$
 $- q$. *Powtóre*: z tey summy biorę cenę ilkości
 g , a z reszty cenę f , będzie 1wża: $g =$
 $py + y^3 + q$ $py + y^3 - q$
 $\frac{\quad}{2y}$, $2ga:f = \frac{\quad}{\quad}$,

czyli mnożąc te pomiary ieden przez 2gi; bę-
dzie: $fg = \frac{py + y^3 - q}{2y} \times \frac{py + y^3 + q}{2y} =$
 $\frac{p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2}{4y^2}$; gubiąc zaś frakcyą

czyli mnożąc 1wżą część pomiaru przez $4y^2$,
będzie: $4fgy^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$.
Potrzenie: z porównania współczynników wy-
żey uczynionego oprócz tych dwóch wypadł
był i 3ci pomiar: $fg = r$, którego $2ga$ część
rozmnożywszy przez $4y^2$, będzie: $fg = 4ry^2$,
a tę cenę założywszy za fg w ostatnim pomie-
rze, będą wszystkie trzy owe pomiary w ten

ieden zbite: $4ry^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$;
czyli ułożywszy terminy porządnie przez §.
XVI. będzie $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 -$
 $q^2 = 0$ pomiar na pozór sześciostopniowy,
w saméy rzeczy sześciogranny naciągany, gdyż
wszystkie wykładniki ilkości niewiadomych po-
dzielne są przez 2, iako się namieniło w §.
XVIII. Ten tedy pomiar użyty być może za
formułę ogólną do redukowania czwartosto-
pniowych szczególnych na sześciogranne po-
dług Przep: następującego.

Przepis 3. Mając dany szczególny iaki
pomiar czwartostopniowy łatwo się obróci na
sześciogranny naciągany za pomocą formuły
dopiero zrobionéy, zrównawszy tamtego współ-
czynnikami z téy terminami p, q, r , i iedne za
zgie założywszy, a tak obrócony ieszcze ł-
twiéy obróci się na prosty na wzór innych sze-
ściogrannych. Co przykład objaśni. Niech
będzie np: $y^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$, bę-
dzie: $p = 17$, $q = 20$, $r = 6$,
które to ceny założywszy za p, q, r w rzeczo-
néy formule; wypadnie: $y^6 - 34y^4 + 313y^2$
 $- 400 = 0$, a ten pomiar, ponieważ jest
naciągany, zredukuje się naprzód na sze-
ściogranny przez § XVII. p. II. założywszy z
za y^2 i będzie: $z^3 - 34z^2 + 313z -$
 $400 = 0$, potem ten sam (wyrugowawszy z
niego termin z^3 przez § XXII.) zredukuje się
na prosty temiż sposobami, co inne sześciogran-
ne przez § XXV lub XXVI.

Prze-

Przepis 4. Jeżeli pomiar czwartostopniowy jest czyſty, iaki jest ten: $x^4 = q$, albo $x^4 = -q$, wyciąga ſię naprzód ſciana czworogranna z iwfzého jego części, będzie. $x^2 = \sqrt{q}$, albo $x^2 = \sqrt{-q}$, potem z obydwóch, będzie $x = \sqrt{\sqrt{q}}$, albo $x = \sqrt{\sqrt{-q}}$. Niech będzie np: $x^4 = 50$, będzie: $x^2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ przez § XXIX. a za powtórniém ſciany wyciągnięciem będzie: $x = \sqrt{5\sqrt{2}}$ i t. d.

Przykłady pomiarów czwartostopniowych.

Zagadnienie iwfze Daną liczbę tak na dwie części podzielić, żeby części tych czworogranny ieden przez drugiego rozmnożywszy, wypadła w produkcie liczba innéy danéy równa.

Rezolucya. Niech będzie liczba dana podzielna $= 2a$, przewyſzka części $= 2x$, będzie część więkſza $= a + x$, mnieyſza $= a - x$; inna liczba produktowi czworogranów równa $= c$, azatém pomiar z warunków Za-

gadnienia wypadnie: $a + x \times a - x = c$, czyli: $x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = c$. Chcąc ſkrócić pomiaru tego redukcją, niech będzie $2a = 14$, toć $a = 7$, $c = 2304$, zaſożywszy więc te liczby za litery, będzie pomiar: $x^4 - 98x^2 + 2401 = 2304$, który oczywiście jest czworogranym naciągany i łatwo ſię zredukuje przez *Przepis 1.* Będzie bowiem naprzód, przenióſſszy

wiado-

wiadome do wiadomych i odciągnąwszy: $x^4 - 98x^2 = -97$. Dodawszy zaś czworogran z połowy współczynnika 2go terminu zrobiony do obydwóch części, będzie: $x^4 - 98x^2 + 2401 = 2401 - 97 = 2304$. Wyciągnąwszy ścianę czworograną z obydwóch części przez § VI. i XI. będzie: $x^2 - 49 = \pm \sqrt{2304} = \pm 48$, czyli: $x^2 = 49 - 48 = \sqrt{1}$; z kądem powtórnie wyciągnąwszy też ścianę, będzie: $x = 1$. Więc $a + x = 7 + 1 = 8$, $a - x = 6$ części zapytane, których czworogranny 64 i 36 przez siebie rozmnożone $= 2304$. C. B. D. R.

Zagadnienie 2gie. Znaleść cztery liczby w ciągłej Arytmetycznej proporcji, któreby przez siebie rozmnożone uczyniły 100.

Rezolucya. Niech będzie przewyszka terminów proporcjonalnych Arytmetycznie $= d$, termin 1wły $= x$, więc 2gi $= x + d$, 3ci $= x + 2d$, 4ty $= x + 3d$, które rozmnożone przez siebie dadzą pomiar czwartostopniowy:

$$x^4 + 6dx + 11d^2x^2 + 6d^3x = 100.$$

Albo: $x^4 + 6dx^3 + 11d^2x^2 + 6d^3x - 100 = 0.$

Pomiar ten, zgubiwszy w nim termin 2gi to jest: przez § XXII. cenę $x = z - \frac{3}{2}d$ wyniesioną do jednychże z x stopniów założywszy w nim za toż x, zamieni się w czworogranny naciągany: $z^4 * - \frac{5}{2}z^2 * + \frac{9}{16}d^4 - 100 = 0$, który się łatwo zredukuje przez Przepis 1. Jeżeli bowiem położymy $d = 1$, będzie: $z^4 -$

$\frac{5}{2} z^2 = 99 + \frac{7}{18}$; a tego dopełniemy dodaniem czworokątnu $z - \frac{5}{4}$ zrobionego przez Przepis 5. § XVIII. będzie: $z^4 - \frac{5}{2} z^2 + \frac{25}{16} = 99 + \frac{7}{18} + \frac{25}{16}$, czyli $z^4 - \frac{5}{2} z^2 + \frac{25}{16} = 101$. Wyciągnąwszy zaś ścianę czworokątną przez § VI, będzie: $z^2 - \frac{5}{4} = \sqrt{101}$, czyli: $z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{101}$, a wyciągnąwszy i ztąd tęż ścianę, będzie: $z = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$. Lecz że za x założone $z - \frac{3}{2} d$, czyli że było $x = z - \frac{3}{2} d$, więc pierwszy termin szukany będzie: $x = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1$ czyli $-\frac{3}{2}$, drugi: $x + d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1 + 1$ czyli: $-\frac{1}{2}$, 3ci: $x + 2d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1 + 2$ czyli $+\frac{1}{2}$, 4ty na koniec $x + 3d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1 + 3$ czyli $+\frac{3}{2}$; azatém produkt 1-wszego rozmnożonego przez 4ty przez § XXXI. będzie: $1 + \sqrt{101}$, produkt zaś 2giego rozmnożonego przez 3ci będzie: $+1 + \sqrt{101}$, a te dwa produkta przez siebie znowu rozmnożone to jest: $-1 + \sqrt{101} \times +1 + \sqrt{101} = 100$. Albowiem $\sqrt{101} = 10\sqrt{1}$, drugie także $\sqrt{101} = 10\sqrt{1}$ przez § XXIX, mnożąc zaś $10\sqrt{1}$ przez $10\sqrt{1}$, będzie produkt $= 100\sqrt{1}$, mnożąc także doskonałą ilkość -1 przez doskonałą $+1$, będzie podług przepisów mnożenia -1 , a to redukując do ściennego mianownika, będzie

dzie — $\sqrt{1}$, azatém ogólny produkt roz-
mnożonych przez siebie czworogranów będzie
 $= 100\sqrt{1} = \sqrt{1} = 100$. C. B. D. R.

Zagadnienie 3cie. Wynaieść trzy liczby,
którychby czworograny były harmonicznie pro-
porcyonalne, to ieść: żeby czworogran nay-
większy tak się miał do najmniejszego, iako
przewyszka między największym i średnim
do przewyszki między średnim i najmniejszym.

Rezolucya. Niech będzie z liczb zapyta-
nych 1wsza $= 1$, 2ga $= x$, toć 3cia $= x \mp$
1, a czworograny 1wszý: 1, 2giý: xx ,
3ciý $x^2 \mp 2x \mp 1$, a z Warunków Zagadnienia
pomiar:

$$x^2 + 2x + 1. 1 : : 2x + 1. xx - 1.$$

Czyli przez Zadan: V. Rozdz: III. Części I.
produkt kraynych terminów będzie równy pro-
duktowi średnich: $x^4 \mp 2x^3 - 2x - 1 = 2x \mp 1$,
czyli: $x^4 + 2x^3 - 4x - 2 = 0$, do któ-
rego redukcji użyć potrzeba sposobu od *Dyo-*
fanta wynalezionego, ponieważ inne się nie
udają; to ieść: potrzeba pomiar ten obrócić
na takie dwa czworograny, którychby prze-
wyszka dodana do większego uczyniła także
czworogran. Takimi czworogranami w tym
przykładzie są 1wszy: $x^2 \mp 2x \mp 1$, 2gi: xx ,
których przewyszka $2x \mp 1$ dodana do $x^2 \mp$
 $2x \mp 1$ daje summę: $x^2 \mp 4x \mp 2$. Ze zaś po-
trzeba: aby ta summa była także czworogra-
granem, więc trzeba wziąć ścianę iaką np:
 $x - 2$ i czworogran iý: $x^2 - 4x \mp 4$ zró-

wnać z rzeczoną summą, będzie: $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 2$, czyli: $x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x - 4 = 0$, czyli $8x - 2 = 0$, czyli na koniec: $8x = 2 = x = \frac{1}{4}$. Więc rzeczona przewyżka dodana do większego czworogranu jest także czworogranem $\frac{1}{4}$, którą założywszy za x w obydwóch wzmiankowanych czworogranach, w 1wszym: $x^2 + 2x + 1$ i w 2gim: xx , będzie 1wszy: $\frac{1}{16} + \frac{2}{4} + 1$, 2gi: $\frac{1}{16}$, czyli 1wszy: $\frac{25}{16}$, 2gi: $\frac{1}{16}$, albo w liczbach całkowitych 1wszy: 25, 2gi: 1; których przewyżka 24 do większego dodana to jest: do 25 uczyni sumę 49, która także czworogranem jest ściany 7. Będą tedy liczby harmonicznie proporcjonalne: 1, xx , $x^2 + 2x + 1 = 1$, xx , $25xx$; azatém $25xx$. $1 :: 24xx$. $xx - 1$. Zrównawszy zaś produkt krajnych terminów z produktem średnich, będzie: $25x^4 - 25x^2 = 24x^2$, czyli wykładników przez 2 podzieliwszy: $25x^2 - 25x = 24x$, czyli: $25x^2 = 24x + 25x = 49x$, czyli: $x^2 = \frac{49}{25}$, więc $25x^2 = \frac{25 \times 49}{25} = \frac{1225}{25}$, azatém liczby zapytane są 1, $\frac{49}{25}$ i $\frac{1225}{25}$, albo całkowite; 1, 49, 1225. C. B. D. R.

Prześłoga 1. Gdyby za ścianę $x = 2$, z której czworogran $\frac{1}{4}$ wypadł, wzięta była inna np: $x = 3$, albo $x = 4$, wynaydowałyby się coraz inne liczby harmonicznie proporcjonalne, byle tylko dwóch czworogranów przewyżka dodana do większego uczyniła także czworogran; inaczej Zagadnienie podobne nie mógłoby być rezolwowane. Prze-

Przeestroga 2. Można by przez Przepisy 2gi i 3ci ostatniego § rozliczne Zagadnienia Geometryczne rezolwować równie iako i niektóre między Przykładami Czworogrannych i Sześciogrannych Zagadnień wyżey położone, gdyby podniesione były do 4tego stopnia; lecz że piérwsze figur, drugie zaś długiego działania wyciągają, coby oboje i dzieła samego i kosztu nan znacznie powiększyło, dlatego się wzmiankowane Zagadnienia własnéy Czytelników zabawce zostawują.

Przeestroga 3. Tegowieczni Pisarze Algebry nie przestają na 4tym stopniu w swoich o niéy pracowitych dziełach; idą iedni nad 2gich wyżey mało baczni nato: iż działania wyższostopniowe po nieskończenie długich i uprzykrzonych pracach równie szczupły iak pozny przyнося pożytek i częstokroć kończą się na samych ogólnościach na pozór wiele, lecz w rzeczy samey bardzo mało co znaczących. Kto za nimi chce iść, niech ich samych bierze sobie za przewodników; jam tu kres pracy moiéy założył, przestając na zdaniu JMé Pana *Saverien*, który pomiary 5tego i 6tego, atém bardziéy wyższych ieszcze stopniów za zbyt wysokie i ledwie nie przewyższające siły Algebrystów poczyta, a to, co się dotąd urobiło, porównywa do sztabów wypuszczonych w niedokończonym murze, które czynią nadzieję: iż dalsza robota może się w czasie pociągnąć, i do dawnych wynalazków co no-

nowego się jeszcze przydać. *Les équations du cinquieme & du sixieme degré passent les efforts des Algebristes & ce qu'on a fait jusques aujourd'hui n'est qu'une pierre d'attente pour quelque decouverte, qu'on peut esperer sans s'en flatter.* Dictionnaire Universel de Mathématique.

KONIEC CZĘSCI DRUGIEY,
i całego Dzieła.



RE-

R E G E S T R

Rzeczy w Części Drugiej zawartych.

Wstęp do téy części na karcie - - - I.

R O Z D Z I A Ł I.

O Rachunku Wykładniczym.

- §. I. Wykład wyrazów do zrozumienia téy Części potrzebnych. - - - 6
- II. Jak ilość pojedyncza niższego stopnia wynosi się do wyższego? - 10
- III. Dwukrotną ilość do danego stopnia wynieść. - 12
- IV. Ułożyć ogólne prawidło do wynieszenia ilości wszelkich na wyższe stopnie. - 14

R O Z D Z I A Ł II.

O Wyciąganiu ścian, a naprzód o składzie i rozbiórze wyższych stopniów Algebraicznych.

- §. V. Jak wyciągnąć ścianę z danego stopnia ilości pojedynczey? - 21
- VI. Gdy dany stopień jest w ilości wielokrotny, jak z niego wyciągnąć ścianę czworokrotną? - 21
- VII. Rozbiór sześciogranów i ścian ich wyciąganie. - 28
- VIII. Ogólne prawidło służące do wyciągania ścian z danych jakichkolwiek stopniów. - 34

§. IX.

§. IX. Wyciąganie ścian z stopniów niedo-
 natych przez przybliżanie. - - 36

R O Z D Z I A Ł III.

O Wyciąganiu ścian z liczb pospolitych.

- §. X. Skład i rozbiór Czworogranów li-
 czbowych. - - - 41
- IX. Jak się wyciąga ściana czworogranna
 z daney czworogranney liczby? - 51
- XII. Skład i rozbiór sześciogranów li-
 czbowych. - - - 62
- XIII. Jak się wyciąga ściana sześciogran-
 na z daney w trzecim stopniu li-
 czby? - - - 67
- XIV. Z daney liczby iakiegokolwiek by-
 też najniższego stopnia wyciągnąć
 ścianę. - - - 84

R O Z D Z I A Ł IV.

O Pomiarach składanych w ogólności.

- §. XV. Wybór potrzebniejszych wyrazów. 89
- XVI. Jakim porządkiem układać terminy
 pomiaru składanego? - 91
- XVII. Jakie są pomysłowniejsze sposoby
 redukowania pomiarów składanych? 93

R O Z D Z I A Ł V.

O Pomiarach czworogrannych.

- §. XVIII. Przepisy na rezolwowanie Proble-
 matow czworogrannych. - 98
- Przy-

R O Z D Z I A Ł VI.

O Pomiarach Sześciogrannych i ich redukcji.

- §. XIX. Skład wewnętrzny tych pomiarów. 130
 — XX. Ściany Sześciogranne i inne wyż-
 szostopniowe. - - 131
 — XXI. Zamiana ścian rzetelnych w nie-
 rzetelne i przeciwnie, tudzież zwię-
 kszenie ich lub zmniejszenie. - 133
 — XXII. Rugowanie terminu iakiego z po-
 miaru i dopełnienie iego. - 134
 — XXIII. O redukcji pomiarów sześcio-
 grannych. - - - 136
 — XXIV. O dalszém redukcji. - 137
 — XXV. O dokończeniu téżże redukcji. 141
 — XXVI. O innym sposobie rzeczzonego do-
 kończenia. - - 143
 Przykłady Zagadnień i redukcji po-
 miarów sześciogrannych. - 145

R O Z D Z I A Ł VII.

O Rachunku Sciennym czyli Radykalnym.

- §. XXVII. Potrzebniejsze o Rachunku tym
 wiadomości. - - 157
 — XXVIII. Jak ściennie ilkości obrócić do
 iednego mianownika? 159
 — XXIX. Jak ie redukować, czyli na
 prostsze obracać? - - 160

§. XXX.

- §. XXX. Dodawanie i odciganie ilości
ściennych. - - - 162
- XXXI. Mnożenie i dzielenie tychże il-
kości. - - - 16
- XXXII. Wynieść ilość ścienną do da-
nego stopnia. - - - 16
- XXXIII. Wyciągnąć ścianę czworogran-
ną z ilości ściennéj. - - -
- XXXIV. Wyciągnąć ścianę sześcio-
graną z téjże ilości. - - -

ROZDZIAŁ VIII.

O Pomiarach Czwartostopniowych.

- §. XXXV. Jak się redukują Pomiary dwuczwo-
rogranne czyli czwartostopniowe? 170.
- Przykłady Pomiarów czwartostopniowych. 174.



162

16

16

160

70

74

Biblioteka Jagiellońska



stdr0017307

